INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIV. BAND VIERTES HEFT 1956

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 7. August 1956

Postverlagsort Berlin *Preis DM 9.—*

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereingt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber
Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Gammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101
oder an die Herren
Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN
einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg — Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 27901

Berlin W 35 — Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 249251

Inhalt:

Seite

Sieker, K.-H., Zur algebraischen Maßsynthese ebener Kurbelgetriebe. Mit 23 Textabbildungen 233

Rotta, J., Experimenteller Beitrag zur Entstehung turbulenter Strömung im Rohr. Mit 30 Textabbildungen 258

Stümke, H., Zur Berechnung der kritischen Geschwindigkeit der reibungs- und relaxationsfreien thermochemischen Gasströmung durch Rohr und Düse 282

INGENIEUR-ARCHIV

XXIV. BAND VIERTES HEFT 1956

Zur algebraischen Maßsynthese ebener Kurbelgetriebe

II. Mitteilung

Von K.-H. Sieker

1. Einleitung. Die algebraische Behandlung getriebesynthetischer Aufgaben bietet gegenüber geometrischen Methoden in verschiedener Hinsicht Vorteile. Die Darstellung in der *Gauß*schen Zahlenebene mittels komplexer Größen führt dabei auf einfache gut übersehbare Gleichungen. In der I. Mitteilung[1] ist auf diese Weise das Gelenkviereck behandelt worden. In dieser II. Mitteilung soll die algebraische Methode auf die Schubkurbel bzw. Schubschwinge angewendet werden. Ferner wird gezeigt, wie diese Methode auch für schwierigere getriebesynthetische Probleme verwendet werden kann. Als Beispiele sind die Ermittlung der Abmessungen von Gelenkvierecken aus gegebenen Koppelpunkten und die Getriebesynthese sechsgliedriger Kurbelgetriebe bei gegebenen Winkelzuordnungen behandelt.

2. Zuordnung von Winkeln und Längen an der Schubkurbel bzw. Schubschwinge. Soll durch ein Kurbelgetriebe die Zuordnung von Längen und Winkeln verwirklicht werden[2], so kann die Schubkurbel bzw. die Schubschwinge verwendet werden. Das algebraische Verfahren mittels der *Gauß*schen Zahlenebene führt hierbei zu einer einfachen Darstellung des Problems und ermöglicht die Ableitung von Formeln, die einfache Berechnungen ermöglichen. Auch Lagen im infinitesimalem Abstand, die durch Ableitungen dargestellt werden können, lassen sich verwirklichen.

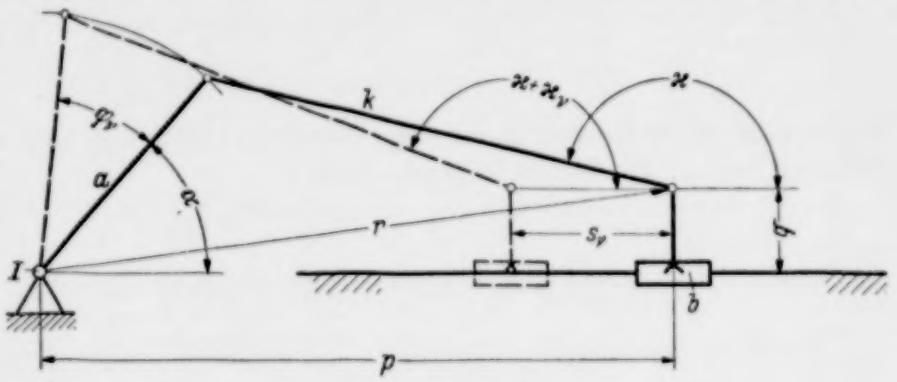

Abb. 1. Schubkurbel.

Wird ein Getriebeglied a um die Welle I (Abb. 1) gedreht, so soll ein anderes Getriebeglied b gerade verschoben werden. Dabei sollen nach einer gegebenen Funktion den Drehwinkeln $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_\nu$ die Schublängen $s_1, s_2 \cdots s_\nu$ zugeordnet sein. Die Koppelgelenke der Schubkurbel sind zu ermitteln. Das eine dieser Gelenke ist in seiner Lage festgelegt durch und α, das andere durch die senkrechten Koordinaten p und q, die den Vektor $\mathfrak{r} = p + i\,q$ bedie Polarkoordinaten stimmen. Werden die Achsen der *Gauß*schen Zahlenebene durch den Drehpunkt I so hindurchgelegt, daß die reelle Zahlenachse die Richtung der gegebenen Schubbewegung erhält, so ergibt sich mit den Bezeichnungen von Abb. 1 für die Ausgangslage des Getriebes folgende Vektorgleichung:

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{k} - \mathfrak{r} = 0\,. \tag{1}$$

Dreht sich der Lenker a um den Winkel φ_ν, so verschiebt sich der Schieber b um den Weg s_ν. Dann gilt die Gleichung

$$\mathfrak{a}\,e^{i\varphi_\nu} - \mathfrak{k}\,e^{i\varkappa_\nu} - \mathfrak{r} + s_\nu = 0\,. \tag{20}$$

Für die zur reellen Zahlenachse spiegelbildliche Anordnung des Getriebes gelten die Gleichungen

$$\bar{\mathfrak{a}} - \bar{\mathfrak{k}} - \bar{\mathfrak{r}} = 0\,, \tag{3}$$

und

$$\bar{\mathfrak{a}}\,e^{-i\varphi_\nu} - \bar{\mathfrak{k}}\,e^{-i\varkappa_\nu} - \bar{\mathfrak{r}} + s_\nu = 0\,. \tag{4}$$

---

[1] Ing.-Arch. 24 (1956) S. 188.

[2] *K.-H. Sieker*, Konstruktion 6 (1954) S. 351.

Die Vereinigung der vier Gleichungen (1) bis (4) führt zu der Beziehung

$$\mathfrak{f}\,\bar{\mathfrak{f}} = (\mathfrak{a} - \mathfrak{r})\,(\bar{\mathfrak{a}} - \bar{\mathfrak{r}}) = \mathfrak{a}\,e^{i\varphi_\nu} - \mathfrak{r} + s_\nu)\,.\,(\bar{\mathfrak{a}}\,e^{-i\varphi_\nu} - \bar{\mathfrak{r}} + s_\nu)\,. \tag{5}$$

Durch Umformung kann man (5) folgende Form geben

$$\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{r}}\,(e^{i\varphi_\nu} - 1) + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{r}\,(e^{-i\varphi} - 1)\,\mathfrak{a}\,s_\nu\,e^{i\varphi_\nu} - \bar{\mathfrak{a}}\,s_\nu\,e^{-i\varphi_\nu} + 2\,p\;s_\nu - s_\nu^2 = 0\,. \tag{6}$$

Schreibt man zur Abkürzung für die komplexen Koeffizienten

$$e^{i\varphi} - 1 = \mathfrak{F}_\nu(\varphi)\,, \qquad e^{-i\varphi} - 1 = \bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi)\,, \tag{7}\ (8)$$

$$s_\nu\,e^{i\varphi_\nu} = \mathfrak{F}_\nu(s\varphi)\,, \qquad s_\nu\,e^{-i\varphi_\nu} = \bar{\mathfrak{F}}_\nu(s\varphi)\,, \tag{9}\ (10)$$

$$s_\nu^2 = \mathfrak{F}_\nu(s), \tag{11}$$

so erhält (6) folgende Form:

$$\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F}_\nu(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\cdot\mathfrak{r}\cdot\bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi) - \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{F}_\nu(s\varphi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_\nu(s\varphi) + 2\,p\,s_\nu - \mathfrak{F}_\nu(s) = 0\,, \tag{12}$$

Sind drei Winkeln φ_1 bis φ_3 drei Längen s_1 bis s_3 zugeordnet, so erhält man aus (12) drei Bestimmungsgleichungen für die Größen a, α, p und q. Eine dieser vier Größen, z. B. α kann frei gewählt werden. Sind vier Winkel-Längen-Zuordnungen gegeben, so erhält man aus (12) für $\nu = 1$ bis 4 vier Gleichungen zur Bestimmung der vier unbekannten Größen.

a) Zuordnung von drei Winkeln und drei Längen. Durch eine einfache Umformung kann (12) auf folgende Form gebracht werden:

$$\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F}_\nu(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{r}\,\bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi) + (\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}})\,s_\nu = \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_\nu(s\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_\nu(s\varphi) + \mathfrak{F}_\nu(s)\,. \tag{13}$$

Werden für φ_ν und s_ν die zugeordneten Werte $\varphi_1\,s_1\,\varphi_2\,s_2$ und $\varphi_3\,s_3$ eingesetzt, so erhält man drei homologe Gleichungen, aus denen durch Zusammenfassen folgende Gleichungen gebildet werden können:

$$\bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{d} = +\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_1 + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{d}_2 + \mathfrak{d}_3\,, \tag{14}$$

$$\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{d} = -\,\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{d}}_1 - \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{d}}_2 - \bar{\mathfrak{d}}_3\,, \tag{15}$$

$$(\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}})\,\mathfrak{d} = +\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_4 - \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{d}}_4 + \mathfrak{d}_5\,. \tag{16}$$

Hierin sind die $\mathfrak{d}$-Größen dreistellige Determinanten, die sich aus den gegebenen Größen bestimmen lassen. Sie haben folgende Form:

$$\mathfrak{d} = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_\nu(\varphi) & \bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi) & s_\nu \\ \end{vmatrix}, \tag{17}$$

$$\mathfrak{d}_1 = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_\nu(\varphi) & \mathfrak{F}_\nu(s\varphi) & s_\nu \\ \end{vmatrix}, \tag{18}$$

$$\mathfrak{d}_2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_\nu(\varphi) & \bar{\mathfrak{F}}_\nu(s\varphi) & s_\nu \\ \end{vmatrix}, \tag{19}$$

$$\mathfrak{d}_3 = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_\nu(\varphi) & \mathfrak{F}_\nu(s) & s_\nu \\ \end{vmatrix}, \tag{20}$$

$$\mathfrak{d}_4 = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_\nu(\varphi) & \bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi) & \mathfrak{F}_\nu(s\varphi) \\ \end{vmatrix}, \tag{21}$$

$$\mathfrak{d}_5 = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_\nu(\varphi) & \bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi) & \mathfrak{F}_\nu(s) \\ \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Durch Zusammenfassen von (14) bis (16) erhält man nach einigen Umformungen

$$\mathfrak{a}^2\,\bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{d}_4 - \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}^2\,\bar{\mathfrak{d}}_4 + \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{d}_5 - \mathfrak{a}^2\,\mathfrak{d}_1 + \bar{\mathfrak{a}}^2\,\bar{\mathfrak{d}}_1 - \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}\,(\mathfrak{d}_2 - \bar{\mathfrak{d}}_2) - \mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_3 + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{d}}_3 = 0\,. \tag{23}$$

Setzt man in die Vektorgleichung (23), die ähnlich aufgebaut ist wie (36) in der I. Mitteilung, reelle Größen ein, so ergibt sich entsprechend (46) in der I. Mitteilung

$$a^2\,(d_{x4}\sin\alpha + d_{y4}\cos\alpha) - a\left(2\,d_{x1}\sin\alpha\cos\alpha + 2\,d_{y1}\cos^2\alpha - d_{y1} + d_{y2} - \frac{1}{2}\,d_{y5}\right) - (d_{x3}\sin\alpha + d_{y3}\cos\alpha) = 0\,. \tag{24}$$

Die Funktion $a = f(\alpha)$ nach (24) stellt eine Kreispunktkurve der Bewegung des Lenkers a gegenüber dem Schieber b dar; sie ist der geometrische Ort aller Drehgelenkpunkte zwischen Lenker a und Koppel k, die die gegebenen Bedingungen betreffs Zuordnung der Winkel φ_ν und Längen s_ν erfüllen.

Auch für den anderen Drehgelenkpunkt der Koppel k zwischen ihr und dem Schieber b kann eine Kurve gefunden werden, die sich durch eine Gleichung ähnlich der in (24) darstellen läßt.

Werden für einen gewählten Winkel α die Werte für a aus (24) bestimmt, so können die zugehörigen Werte für p und q aus folgender Gleichung ermittelt werden, die sich aus (14) ergibt

$$\mathfrak{r} = p + i\,q = \frac{a^2\,\mathfrak{d}_1 + a^2\,\mathfrak{d}_2 + a\,\mathfrak{d}_3}{a^2\,\mathfrak{d}}. \tag{25}$$

Erstes Zahlenbeispiel. Für die Zuordnung von Längen und Winkeln an einer Schubkurbel soll folgende Funktion zugrunde gelegt werden (Abb. 2):

$$y = C \sin^2 c\,x. \tag{26a}$$

Wird der Nullpunkt für die Koordinaten φ und s an die Stelle $c\,x_0 = \pi/6$ gelegt und die Konstante $C = 1$ gesetzt, so ergibt sich für $y_0 = 1/4$. Mit Berücksichtigung der Koordinantentransformation erhält man dann für die Funktion $s = f(\varphi)$ aus (26a), wenn man

$$y = s + y_0 \quad \text{und} \quad c\,x = \varphi + c\,x_0$$

setzt, $s + \frac{1}{4} = \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$

oder

$$s = \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}. \tag{26b}$$

Werden für die Punkte 1, 2, 3 (Abb. 2) die Winkel

$\varphi_1 = \frac{\pi}{12}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$ und $\varphi_3 = \frac{\pi}{4}$

eingesetzt, so ergeben sich folgende Zuordnungen:

Punkt	φ_ν^0	$\widehat{\varphi_\nu}$	s_ν
1	15	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{4}$
2	30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
3	45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$

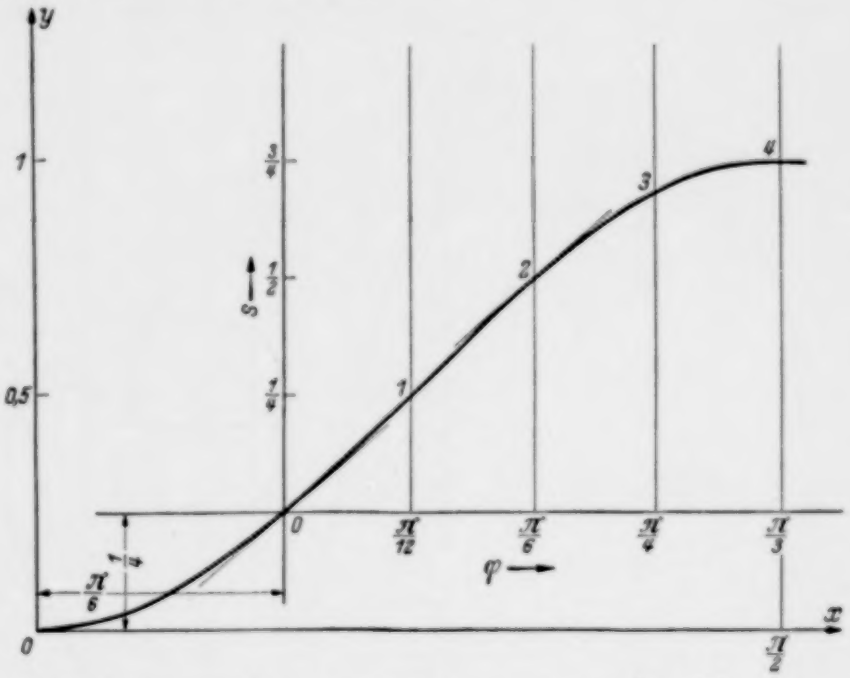

Abb. 2. Darstellung der Funktion $y = C \sin^2 c\,x$ bzw. $s = \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}$.

Für die Berechnung der $\mathfrak{F}$-Größen werden die Sinus- und Cosinus-Werte der Winkel φ_ν und ihre Produkte mit den Strecken benötigt:

Punkt	$\sin\varphi_\nu$	$\cos\varphi_\nu$	$s_\nu \sin\varphi_\nu$	$s_\nu \cos\varphi_\nu$
1	0,258 819 0	0,965 925 8	0,064 704 8	0,241 481 5
2	0,5	0,866 025 4	0,25	0,433 012 7
3	0,707 106 8	0,707 106 8	0,482 962 9	0,482 962 9

Aus (7) bis (11) erhält man dann folgende Zahlenwerte:

Punkt	$\mathfrak{F}_\nu(\varphi)$	$\mathfrak{F}_\nu(s\,\varphi)$	$\mathfrak{F}_\nu(s)$
1	$-0{,}034\,074\,2 + i\,0{,}258\,819\,0$	$0{,}241\,481\,5 + i\,0{,}064\,704\,8$	0,062 5
2	$-0{,}133\,974\,6 + i\,0{,}5$	$0{,}433\,012\,7 + i\,0{,}25$	0,25
3	$-0{,}292\,893\,2 + i\,0{,}707\,106\,8$	$0{,}482\,962\,9 + i\,0{,}482\,962\,9$	0,466 506 3

Die Berechnung der Determinanten (17) bis (22), die mit Hilfe der Beziehungen (64) in der I. Mitteilung durchgeführt werden kann, ergibt folgende Werte:

$10^3\,\mathfrak{d} = +i\,1{,}762\,078\,5$,
$10^3\,\mathfrak{d}_1 = +1{,}763\,974 + i\,1{,}764\,261$,
$10^3\,\mathfrak{d}_2 = -0{,}935\,754 - i\,0{,}205\,263$,
$10^3\,\mathfrak{d}_3 = +1{,}376\,73 - i\,1{,}304\,133$,
$10^3\,\mathfrak{d}_4 = -2{,}126\,994 + i\,2{,}771\,931$,
$10^3\,\mathfrak{d}_5 = +i\,2{,}935\,58$.

Zur Darstellung der Funktion $a = f(\alpha)$ nach (24) sind folgende Werte berechnet worden:

$\alpha°$	$d_{x4}\sin\alpha + d_{y4}\cos\varphi$	$2\,d_{x1}\sin\alpha\cos\alpha + 2\,d_{y1}\cos^2\alpha - d_{y1} + d_{y2} - 0{,}5\,d_{y5}$	$d_{x3}\sin\alpha + d_{y3}\cos\alpha$	a_1	a_2
43,44	+ 0,549 6	+ 0,182 7	0	0	+ 0,332 4
46,68	+ 0,354 453	— 0,014 776	+ 0,106 822	+ 0,528 5	— 0,570 2
52,50	0	— 0,425 6	+ 0,298 3	+ 0,700 9	∞
60	— 0,456 065	— 1,027 520	+ 0,540 216	+ 0,835 8	+ 1,417 2
75	— 1,337 1	— 2,319 0	+ 0,992 3	+ 0,767 7	+ 0,966 6
90	— 2,126 994	— 3,437 314	+ 1,376 73	+ 0,733 0	+ 0,883 1

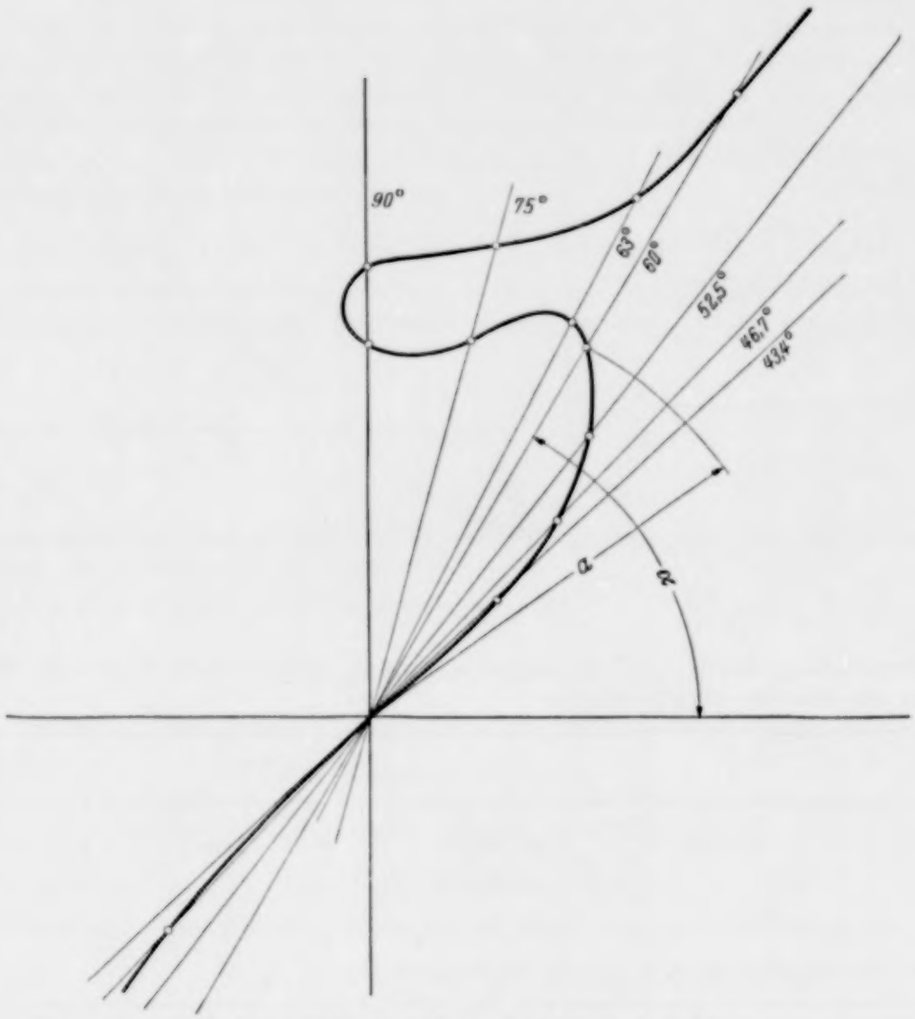

Abb. 3. Darstellung der Kurve $a = f(\alpha)$ nach dem 1. Beispiel.

Für den Verlauf der Kurve $a = f(\alpha)$ (Abb. 3) sind folgende Größen besonders kennzeichnend: Für $\alpha = 52{,}50°$ wird $d_{x4}\sin\alpha + d_{y4}\cos\alpha = 0$. Hierfür ergibt sich der eine Wert für a gleich Unendlich, d. h. die Gerade durch den Nullpunkt unter diesem Winkel ist eine Asymptote der Kurve. Für $\alpha = 43{,}44°$ wird $d_{x3}\sin\alpha + d_{y3}\cos\alpha = 0$ und damit ein Wert von a gleich Null. Da ein Wert für a nach (23) immer gleich Null ist unabhängig vom Winkel α, ist die Gerade unter diesem Winkel eine Tangente der Kurve im Nullpunkt. Der Wert $a_1 = 0{,}528\,5$ für den Winkel $\alpha = 46{,}68°$ entspricht dem im 2. Beispiel errechneten für vier gegebene Winkelzuordnungen.

Als Beispiel ist für $\alpha = 90°$ und $a = 0{,}8831$ aus (25) der Wert für τ errechnet worden:

$$\tau = -0{,}2334 + i\,0{,}694\,.$$

Damit ist $p = -0{,}2334$ und $q = +0{,}694$. In Abb. 4 ist das Getriebe mit diesen Werten dargestellt.

Um einen Überblick zu erhalten, wie weitgehend das Getriebe in Abb. 4 die gegebene Funktion erfüllt, wird der Unterschied

$$u = s_k - s_f \tag{27}$$

bestimmt. Hierin ist $s_k = f(\varphi)$ die Winkel-Längen-Funktion des Kurbelgetriebes und $s_f = f(\varphi)$ die gegebene Funktion (26b). s_k kann aus (6) ermittelt werden:

$$s_k = A \pm \sqrt{A^2 + 2B}. \tag{28}$$

Hierin bedeutet

$$A = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{a}\, e^{i\varphi} + \bar{\mathfrak{a}}\, e^{-i\varphi}\right) - p, \tag{29a}$$

$$B = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{r}}\,(e^{i\varphi} - 1) + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{r}\,(e^{-i\varphi} - 1)\right]. \tag{30a}$$

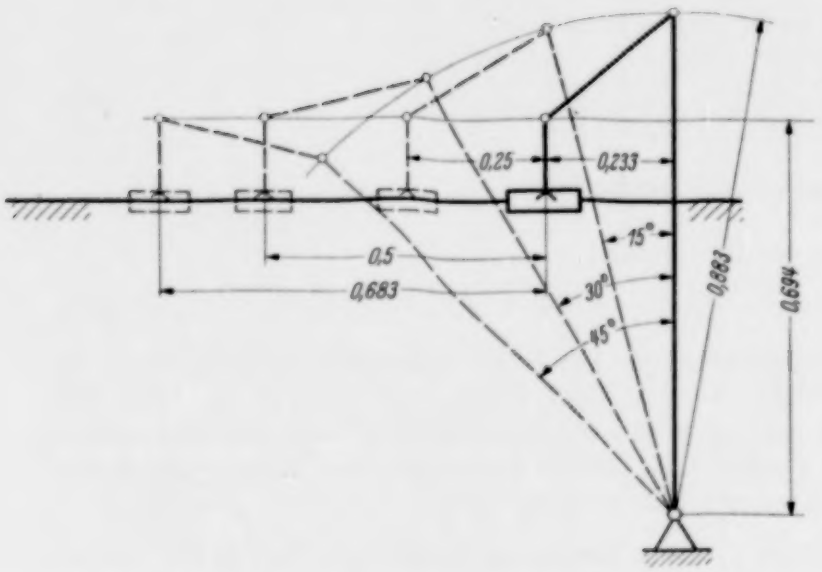

Abb. 4. Schubschwinge nach dem 1. Beispiel für $\alpha = 90°$ und $a = 0{,}883$.

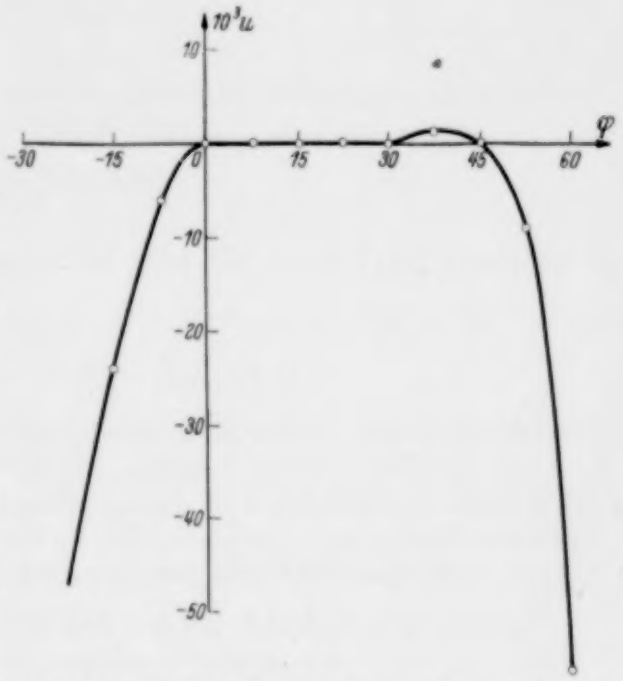

Abb. 5. Unterschied u der Kurbelgetriebe-Funktion $s_k = f(\varphi)$ von der gegebenen Funktion $s_f = f(\varphi)$ für die Schubschwinge Abb. 4.

Werden die Größen A und B durch reelle Werte ausgedrückt, so erhält man

$$A = a_x \cos\varphi - a_y \sin\varphi - p, \tag{29b}$$

$$B = (a_x p + a_y q)(\cos\varphi - 1) + (a_x q - a_y p)\sin\varphi. \tag{30b}$$

Für die Schubschwinge in Abb. 4 ergeben sich folgende Zahlenwerte:

$\varphi =$	-30	-15	$-7{,}5$	0	$7{,}5$	15	$22{,}5$	30	$37{,}5$	45	$52{,}5$	60	$67{,}5$
$10^3\, u =$	-133	-24	-6	0	0	0	0	0	$+1$	0	-9	-56	—

In Abb. 5 ist die Größe u in Abhängigkeit vom Winkel φ graphisch dargestellt.

b) Zuordnung von vier Winkeln und vier Längen. Gleichung (12) kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F}_\nu(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{r}\,\bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi) - \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_\nu(s\varphi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_\nu(s\varphi) = \mathfrak{F}_\nu(s) - 2\,p\,s_\nu. \tag{31}$$

Setzt man in (31) für φ_ν die vier Winkel φ_1 bis φ_4 und für s_ν die zugeordneten Längen s_1 bis s_4 ein, so erhält man vier homologe Gleichungen, die in folgender Weise zusammengefaßt werden können

$$\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 + 2\,p\,d_2, \tag{32}$$

$$\bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{d} = \bar{\mathfrak{d}}_1 + 2\,p\,\bar{\mathfrak{d}}_2, \tag{33}$$

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_3 + 2\,p\,\mathfrak{d}_4, \tag{34}$$

$$\bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{d} = \bar{\mathfrak{d}}_3 + 2\,p\,\bar{d}_4. \tag{35}$$

Hierin bedeutet

$$\mathfrak{d} = |\mathfrak{F}_\nu(\varphi) \quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi) \quad \mathfrak{F}_\nu(s\varphi) \quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(s\varphi)|\,, \tag{36}$$

$$\mathfrak{d}_1 = |\mathfrak{F}_\nu(s) \quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi) \quad \mathfrak{F}_\nu(s\varphi) \quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(s\varphi)|\,, \tag{37}$$

$$\mathfrak{d}_2 = |-s_\nu \quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi) \quad \mathfrak{F}_\nu(s\varphi) \quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(s\varphi)|\,, \tag{38}$$

$$\mathfrak{d}_3 = |\mathfrak{F}_\nu(\varphi) \quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi) \quad \mathfrak{F}_\nu(s) \quad -\overline{\mathfrak{F}}_\nu(s\varphi)|\,, \tag{39}$$

$$\mathfrak{d}_4 = |\mathfrak{F}_\nu(\varphi) \quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi) \quad s_\nu \quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(s\varphi)|\,. \tag{40}$$

Werden (32) durch (34) und (33) durch (35) dividiert, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\overline{\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{d}_1 + 2p\,\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{d}_3 + 2p\,\mathfrak{d}_4}\,, \tag{41a}$$

$$\mathfrak{r} = \frac{\overline{\mathfrak{d}_1} + 2p\,\overline{\mathfrak{d}_2}}{\overline{\mathfrak{d}_3} + 2p\,\overline{\mathfrak{d}_4}}\,. \tag{41b}$$

Addiert man die beiden Gleichungen (41a) und (46b) so ergibt sich

$$2p = \frac{\mathfrak{d}_1 + 2p\,\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{d}_3 + 2p\,\mathfrak{d}_4} + \frac{\overline{\mathfrak{d}_1} + 2p\,\overline{\mathfrak{d}_2}}{\overline{\mathfrak{d}_3} + 2p\,\overline{\mathfrak{d}_4}}\,. \tag{42}$$

Gleichung (42) kann in folgender Weise umgeformt werden:

$$\begin{aligned}(2p)^3\,\mathfrak{d}_4\,\overline{\mathfrak{d}_4} + (2p)^2\,(\mathfrak{d}_3\,\overline{\mathfrak{d}_4} + \overline{\mathfrak{d}_3}\,\mathfrak{d}_4 - \mathfrak{d}_2\,\overline{\mathfrak{d}_4} - \overline{\mathfrak{d}_2}\,\mathfrak{d}_4)\\ + (2p)\,(\mathfrak{d}_3\,\overline{\mathfrak{d}_3} - \mathfrak{d}_1\,\overline{\mathfrak{d}_4} - \overline{\mathfrak{d}_1}\,\mathfrak{d}_4 - \mathfrak{d}_2\,\overline{\mathfrak{d}_3} - \overline{\mathfrak{d}_2}\,\mathfrak{d}_3) - (\mathfrak{d}_1\,\overline{\mathfrak{d}_3} + \overline{\mathfrak{d}_1}\,\mathfrak{d}_3) = 0\,.\end{aligned} \tag{43}$$

Die Koeffizienten dieser kubischen Gleichung sind reell. Die Lösung dieser Gleichung, die z. B. mittels des *Horner*schen Schemas durchgeführt werden kann, führt entweder auf eine oder auf drei reelle Wurzeln für $2p$. Entsprechend gibt es eine oder drei Schubkurbeln, die die vorgegebenen Bedingungen erfüllen. Die Größe q ergibt sich mittels des ermittelten Wertes von p aus (41a). Länge a und Ausgangswinkel α der Kurbel erhält man aus (34).

Zweites Zahlenbeispiel. Zu den drei Winkeln φ_1 bis φ_3 des ersten Beispiels soll noch ein vierter Winkel $\varphi_4 = \pi/3$ hinzugefügt werden, dem die Länge $s_4 = 3/4$ entspricht. Man erhält also folgende Zuordnungen:

Punkt	φ_ν^0	$\widehat{\varphi}_\nu$	s_ν
1	15	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{4}$
2	30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
3	45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$
4	60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3}{4}$

Die Sinus- und Cosinus-Werte der Winkel φ_ν und ihre Produkte mit den Strecken s_ν haben folgende Größen:

Punkt	$\sin\varphi_\nu$	$\cos\varphi_\nu$	$s_\nu \cdot \sin\varphi_\nu$	$s_\nu \cos\varphi_\nu$
1	0,258 819 0	0,965 925 8	0,064 704 8	0,241 481 5
2	0,5	0,866 025 4	0,25	0,433 012 7
3	0,707 106 8	0,707 106 8	0,482 962 9	0,482 962 9
4	0,866 025 4	0,5	0,649 519 1	0,375

Für die $\mathfrak{F}$-Größen ergeben sich dann mittels (7) bis (11) folgende Werte:

Punkt	$\mathfrak{F}_\nu(\varphi)$	$\mathfrak{F}_\nu(s\varphi)$	$\mathfrak{F}_\nu(s)$
1	$-0{,}034\,074\,2 + i\,0{,}258\,819\,0$	$0{,}241\,481\,5 + i\,0{,}064\,704\,8$	0,062 5
2	$-0{,}133\,974\,6 + i\,0{,}5$	$0{,}433\,012\,7 + i\,0{,}25$	0,25
3	$-0{,}292\,893\,2 + i\,0{,}707\,106\,8$	$0{,}482\,962\,9 + i\,0{,}482\,962\,9$	0,466 506 3
4	$-0{,}5 + i\,0{,}866\,025\,4$	$0{,}375 + i\,0{,}649\,519\,1$	0,562 5

Die Berechnung der $\mathfrak{d}$-Determinanten (36) bis (40), die mittels der Beziehungen (88) bis (93) in der I. Mitteilung durchgeführt werden kann, ergibt folgende Werte:

$$10^6\,\mathfrak{d} = -489{,}403,$$
$$10^6\,\mathfrak{d}_1 = -150{,}650 - i\;6{,}491\,8,$$
$$10^6\,\mathfrak{d}_2 = +36{,}140\,4 - i\;132{,}602\,4,$$
$$10^6\,\mathfrak{d}_3 = +1{,}621\,44 - i\;335{,}608\,8,$$
$$10^6\,\mathfrak{d}_4 = -95{,}255\,7 + i\;78{,}578\,2.$$

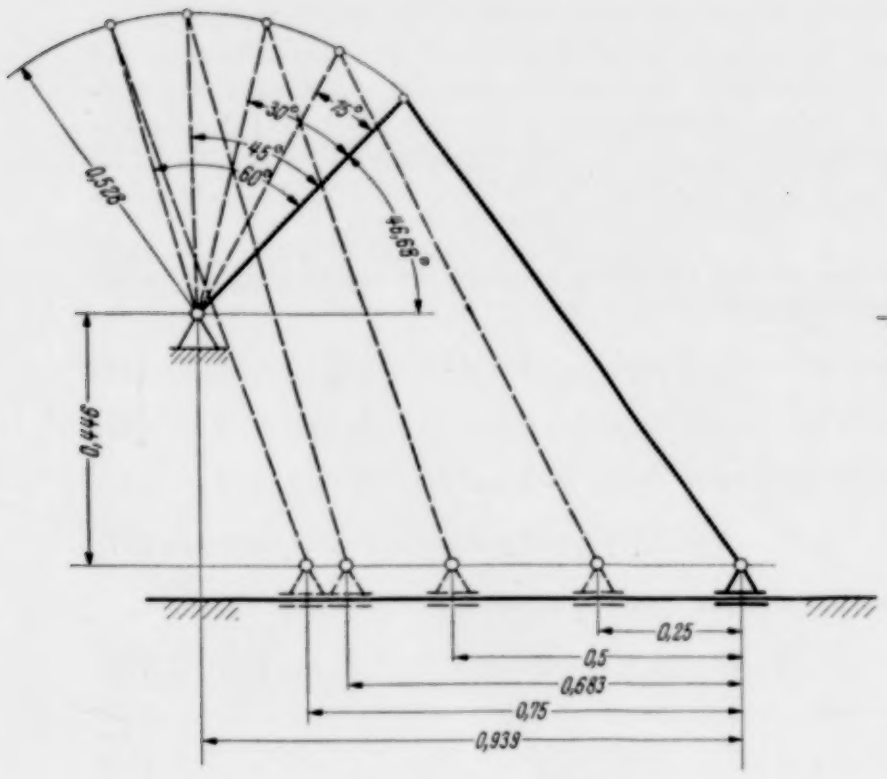

Abb. 6. Schubschwinge nach dem 2. Beispiel.

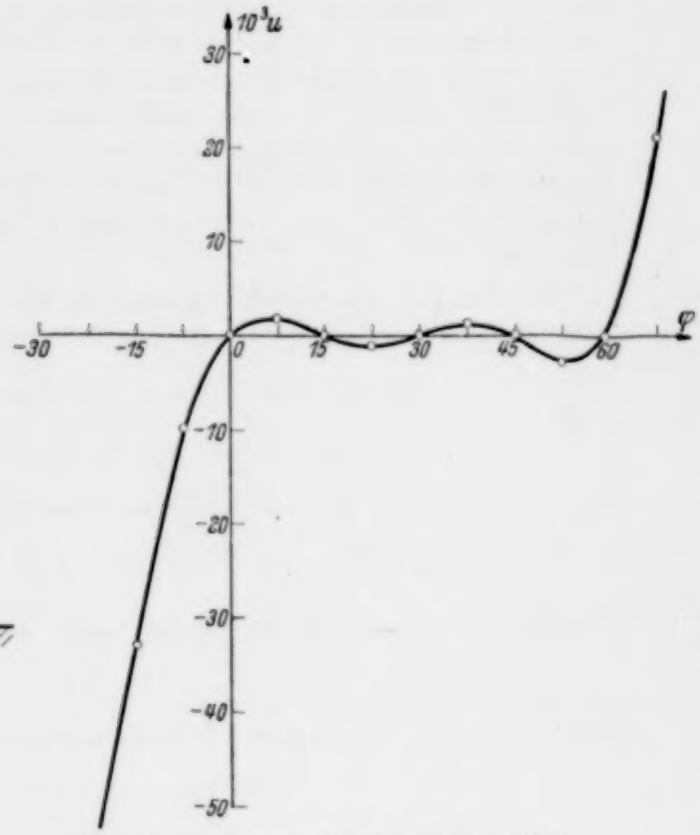

Abb. 7. $u = s_h - s_f$ für die Schubschwinge Abb. 6.

Für die Koeffizienten der Gleichung (43) ergeben sich folgende Werte:

$$10^{12}\,\mathfrak{d}_4\,\bar{\mathfrak{d}}_4 = +15\,248{,}2,$$
$$10^{12}\,(\mathfrak{d}_3\,\bar{\mathfrak{d}}_4 + \bar{\mathfrak{d}}_3\,\mathfrak{d}_4 - \mathfrak{d}_2\,\bar{\mathfrak{d}}_4 - \bar{\mathfrak{d}}_2\,\mathfrak{d}_4) = -25\,327{,}5,$$
$$10^{12}\,(\mathfrak{d}_3\,\bar{\mathfrak{d}}_3 - \mathfrak{d}_1\,\bar{\mathfrak{d}}_4 - \bar{\mathfrak{d}}_1\,\mathfrak{d}_4 - \mathfrak{d}_2\,\bar{\mathfrak{d}}_3 - \bar{\mathfrak{d}}_2\,\mathfrak{d}_3) = -4\,166{,}68,$$
$$10^{12}\,(\mathfrak{d}_1\,\bar{\mathfrak{d}}_3 + \bar{\mathfrak{d}}_1\,\mathfrak{d}_3) = -3\,868{,}87.$$

Damit nimmt (43) fir Form an

$$(2p)^3 - 1{,}661\,02\,(2p)^2 - 0{,}273\,258\,(2p) - 0{,}253\,727 = 0.$$

Die Auswertung dieser Gleichung, die nach dem *Horner*schen Schema vorgenommen werden kann, führt zu der Lösung

$$2p = +1{,}878\,40\,, \quad p = +0{,}939\,20\,.$$

Die beiden anderen Wurzeln sind komplex und deshalb für diesen Zweck nicht brauchbar. Aus (41) erhält man

$$q = -0{,}445\,531$$

und aus (34)

$$\mathfrak{a} = 0{,}363\,293 + i\,0{,}384\,157\,.$$

Hieraus ergibt sich

$$a = 0{,}5281 \quad \text{und} \quad \alpha = 46{,}68°.$$

In Abb. 6 ist das Getriebe mit den errechneten Abmessungen dargestellt.

Der Funktionsunterschied $u = s_k - s_f$ (27) ergibt mittels (26 b) und (28) bis (30) für einige Winkel folgende Werte:

$\varphi =$	-30	-15	$-7{,}5$	0	$7{,}5$	15	$22{,}5$	30	$37{,}5$	45	$52{,}5$	60	$67{,}5$
$10^3\,u =$	-132	-33	-10	0	$+2$	0	-1	0	$+1$	0	-3	0	$+21$

In Abb. 7 ist die Größe u in Abhängigkeit vom Winkel φ dargestellt.

3. Anpassung der Ableitungen der Funktionen $s_f = f(\varphi)$ an die Schubkurbel bzw. Schubschwinge. Sollen die Ableitungen der Funktion $s_k = f(\varphi)$ an der Schubkurbel den Ableitungen einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ an einer bestimmten Stelle angepaßt werden, um die Schubkurbel an dieser Stelle als Funktionsgetriebe benutzen zu können, so können mittels der Darstellung in der *Gauß*schen Zahlenebene ebenfalls Formeln entwickelt werden, die den für die Zuordnung endlicher Winkel und Längen entsprechen. Werden die Ableitungen bis zur dritten Ordnung angepaßt, so ist die freie Wahl einer Größe für die Bemessung der Schubkurbel möglich. Wird dagegen die Ableitung vierter Ordnung auch noch gegeben, so ist eine freie Wahl nicht mehr möglich.

Wird in (12) die Ableitung nach $d\varphi$ bis zur vierten Ordnung gebildet, so ergibt sich, wenn die Ableitungen durch Striche gekennzeichnet werden,

$$\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F}'(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{F}}'(\varphi) - \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}'(s\varphi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{F}}'(s\varphi) + 2ps' - \mathfrak{F}'(s) = 0\,, \tag{44}$$

$$\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F}''(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{F}}''(\varphi) - \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}''(s\varphi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{F}}''(s\varphi) + 2ps'' - \mathfrak{F}''(s) = 0\,, \tag{45}$$

$$\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F}'''(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{F}}'''(\varphi) - \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}'''(s\varphi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{F}}'''(s\varphi) + 2ps''' - \mathfrak{F}'''(s) = 0\,, \tag{46}$$

$$\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{F}''''(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{F}}''''(\varphi) - \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}''''(s\varphi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{F}}''''(s\varphi) + 2ps'''' - \mathfrak{F}''''(s) = 0\,. \tag{47}$$

Da $\mathfrak{F}(\varphi) = e^{i\varphi} - 1$ [siehe (7)] ist, erhält man

$$\mathfrak{F}'(\varphi) = i\,e^{i\varphi}, \quad \mathfrak{F}''(\varphi) = -e^{i\varphi}, \quad \mathfrak{F}'''(\varphi) = -i\,e^{i\varphi}, \quad \mathfrak{F}''''(\varphi) = +e^{i\varphi}. \tag{48 bis 51}$$

Nach (9) ist $\mathfrak{F}(s\varphi) = s\,e^{i\varphi}$. Daraus ergibt sich

$$\mathfrak{F}'(s\varphi) = e^{i\varphi}(s' + i\,s)\,, \tag{52}$$

$$\mathfrak{F}''(s\varphi) = e^{i\varphi}(-s + s'' + 2i\,s')\,, \tag{53}$$

$$\mathfrak{F}'''(s\varphi) = e^{i\varphi}(-3\,s' + s''' - i\,s + 3i\,s'')\,, \tag{54}$$

$$\mathfrak{F}''''(s\varphi) = e^{i\varphi}(s - 6\,s'' + s'''' - 4i\,s' + 4i\,s''')\,. \tag{55}$$

Ferner ist $\mathfrak{F}(s) = s^2$ (11) und damit

$$\mathfrak{F}'(s) = 2\,s\,s'\,, \tag{56}$$

$$\mathfrak{F}''(s) = 2\,(s'^2 + s\,s'')\,, \tag{57}$$

$$\mathfrak{F}'''(s) = 2\,(3\,s'\,s'' + s\,s''')\,, \tag{58}$$

$$\mathfrak{F}''''(s) = 2\,(3\,s''^2 + 4\,s'\,s''' + s\,s'''')\,. \tag{59}$$

Sind für die Anpassung drei Ableitungen gegeben, so führt die weitere Entwicklung auf Gleichungen, die (23) und (24) entsprechen. Die Determinanten $\mathfrak{d}$ (17) bis (22) werden aus den

Ableitungen der $\mathfrak{F}$-Größen gebildet. So hat z. B. die Determinante $\mathfrak{d}_4$ folgende Form:

$$\mathfrak{d}_4 = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}'(\varphi) & \overline{\mathfrak{F}}'(\varphi) & \overline{\mathfrak{F}}'(s\varphi) \\ \mathfrak{F}''(\varphi) & \overline{\mathfrak{F}}'(\varphi) & \overline{\mathfrak{F}}''(s\varphi) \\ \mathfrak{F}'''(\varphi) & \overline{\mathfrak{F}}'''(\varphi) & \overline{\mathfrak{F}}'''(s\varphi) \end{vmatrix}.$$

Mit dieser Bedeutung der Determinanten hat (23) hier ebenfalls Gültigkeit.

Ist auch noch die vierte Ableitung s'''' gegeben, so entspricht die Entwicklung der für die Zuordnung von vier Winkeln und vier Längen. Über die Umformung (31) erhält man dann zur Bestimmung der Größe p die Gleichung (43), in der die Determinanten $\mathfrak{d}$ aus den Ableitungen der $\mathfrak{F}$-Größen gebildet werden. So ergibt sich z. B.

$$\mathfrak{d}_1 = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}'(s) & \mathfrak{F}'(\varphi) & \mathfrak{F}'(s\varphi) & \overline{\mathfrak{F}}'(s\varphi) \\ \mathfrak{F}''(s) & \mathfrak{F}''(\varphi) & \mathfrak{F}''(s\varphi) & \overline{\mathfrak{F}}''(s\varphi) \\ \mathfrak{F}'''(s) & \mathfrak{F}'''(\varphi) & \mathfrak{F}'''(s\varphi) & \overline{\mathfrak{F}}'''(s\varphi) \\ \mathfrak{F}''''(s) & \mathfrak{F}''''(\varphi) & \mathfrak{F}''''(s\varphi) & \overline{\mathfrak{F}}''''(s\varphi) \end{vmatrix}. \tag{61}$$

Ebenso wie bei dem Gelenkviereck können auch hier Zuordnungen von Winkeln und Längen und die Anpassung ihrer Ableitungen kombiniert gegeben und daraus die Abmessungen der Schubkurbel bestimmt werden.

Drittes Zahlenbeispiel. Die im ersten Beispiel gegebene Funktion

$$s = \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4} \qquad \text{[siehe (26b)]}$$

soll auch diesem Beispiel zugrunde gelegt werden, um daraus die zu gebenden Größen zur Ermittlung der Schubkurbel-Abmessungen zu entnehmen.

Gegeben sind die Ableitungen im Nullpunkt bis zur dritten Ordnung. Die Ableitungen von (26b) führt zu folgenden Beziehungen:

$$s' = 2 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \tag{62}$$

$$s'' = 2\left[\cos^2\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)\right]. \tag{63}$$

$$s''' = -8 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right). \tag{64}$$

Für den Nullpunkt mit $\varphi = 0$ ergibt sich

$$s'(0) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad s''(0) = 1, \quad s'''(0) = -2\sqrt{3}.$$

Werden die Ableitungen in (52) bis (54) und (56) bis (58) eingesetzt, so erhält man für die $\mathfrak{F}$-Größen:

Abl.	$\mathfrak{F}(\varphi)$	$\mathfrak{F}(s\varphi)$	$\mathfrak{F}(s)$
1.	$0 + i\,1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\,0$	0
2.	$-1 + i\,0$	$1 + i\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}$
3.	$0 - i\,1$	$-\frac{7}{2}\sqrt{3} + i\,3$	$3\sqrt{3}$

Die Berechnung der $\mathfrak{d}$-Determinanten, die in (17) bis (22) dargestellt sind, kann wie im ersten Beispiel mit Hilfe von (64) in der I. Mitteilung ausgeführt werden. Es ergeben sich folgende Werte:

$$\mathfrak{d} = +i\,3\sqrt{3} = +i\,5{,}196\,15,$$

$$\mathfrak{d}_1 = +\frac{39}{4} = +9{,}75,$$

$$\mathfrak{d}_2 = -\frac{21}{4} + i\,3\sqrt{3} = -5{,}25 + i\,5{,}196\,15\,,$$

$$\mathfrak{d}_3 = -\frac{9}{2} - i\,\frac{21}{4}\sqrt{3} = -4{,}5\,i - 9{,}093\,26\,,$$

$$\mathfrak{d}_4 = +6 + i\,6\sqrt{3} = +6 + i\,10{,}392\,30\,,$$

$$\mathfrak{d}_5 = -i\,6\sqrt{3} = -i\,10{,}392\,30\,.$$

Zur Darstellung der Funktion $a = f(\alpha)$ nach Gl. (24) sind folgende Werte berechnet worden:

α	$d_{x4}\sin\alpha + d_{y4}\cos\alpha$	$2\,d_{x1}\sin\alpha\cos\alpha + d_{y1}\cos^2\alpha - d_{y1} + d_{y2} - 0{,}5\,d_{y5}$	$d_{x3}\sin\alpha + d_{y3}\cos\alpha$	a_1	a_2
60	+ 10,392 3	+ 18,836 05	— 8,443 75	+ 1	+ 0,812 5
90	+ 6	+ 10,392 3	— 4,5	+ 0,866 0	+ 0,866 0
120	0	+ 1,948 55	+ 0,649 52	— 0,333	∞

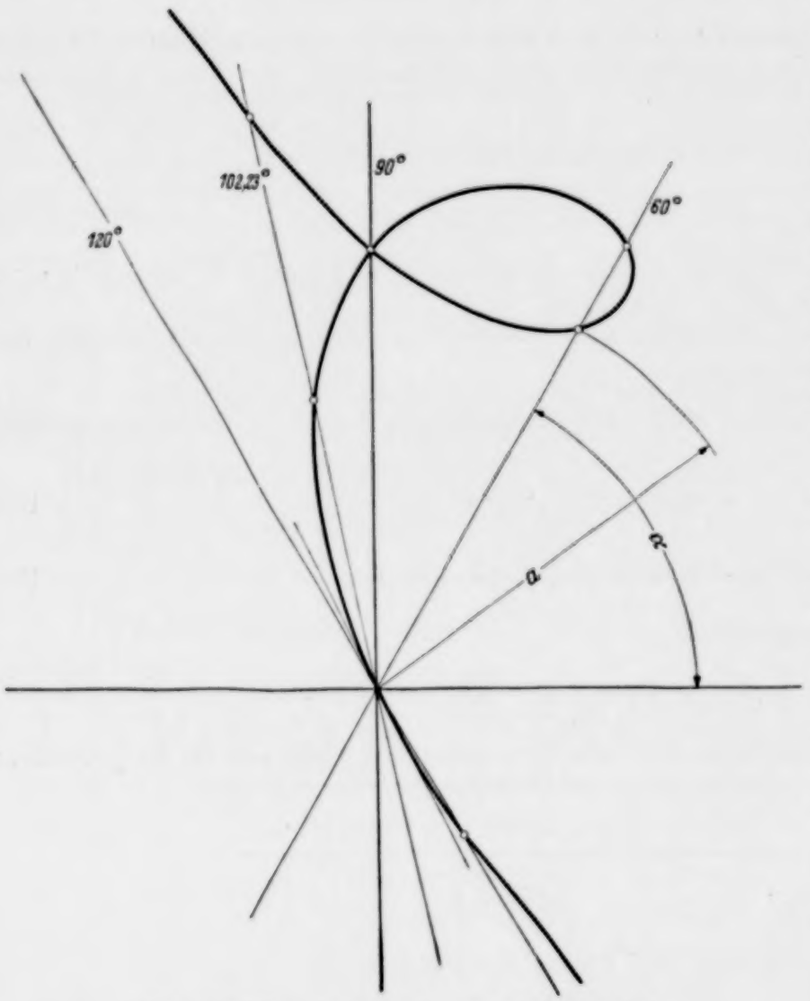

Abb. 8. Darstellung der Kurve $a = f(\alpha)$ nach dem 3. Beispiel.

Für $\alpha = 116{,}3$ wird

$$d_{x3}\sin\alpha + d_{y3}\cos\alpha = 0.$$

Hierfür wird ein Wert für a null. Die Gerade durch den Nullpunkt unter diesem Winkel tangiert die Kurve im Nullpunkt. Für $\alpha = 102{,}38°$ ergibt die Rechnung: $a_1 = 1{,}152\,7$ und $a_2 = 0{,}584\,2$. Der Wert für a_2 entspricht dem im vierten Beispiel errechneten für die Anpassung der Ableitungen bis zur vierten Ordnung.

Die Kurve $a = f(\alpha)$ ist in Abb. 8 dargestellt. Als Beispiel ist für

$$\alpha = 60° \quad \text{und} \quad a = +1$$

aus (25) der Wert für τ errechnet worden:

$$\tau = +1 + i\,0{,}866\,.$$

Damit wird

$$p = +1 \quad \text{und} \quad q = +0{,}866.$$

In Abb. 9 ist das Getriebe mit diesen Abmessungen dargestellt.

Aus (26b) und (28) bis (30) können für bestimmte Winkel φ die Werte für den Unterschied $u = s_k - s_f$ (27) berechnet werden.

$\varphi =$	— 30	— 15	— 7,5	0	7,5	15	22,5	30	37,5	45	52,5	60	67,5
$10_4\,u =$	+ 43	+ 2	0	0	0	+ 1	+ 6	+ 18	+ 43	+ 86	+ 157	+ 250	+ 381

Diese Werte sind in Abb. 10 in dem maßgebenden Bereich graphisch dargestellt.

Viertes Zahlenbeispiel. Zu den Ableitungen im Nullpunkt bis zur dritten Ordnung im dritten Beispiel soll noch als weitere Bedingung die Ableitung vierter Ordnung zusätzlich gegeben sein.

Durch die vierte Ableitung der Strecke s nach $d\varphi$ erhält man aus (64)

$$s'''' = 8\left[\sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)\right]. \tag{65}$$

Für den Nullpunkt mit $\varphi = 0$ ergibt sich

$$s'''' = -4\,.$$

Aus diesen vier gegebenen Bedingungen können die Abmessungen des Kurbelgetriebes bestimmt werden, wobei es entweder eine oder drei Lösungen geben kann je nach dem, ob die kubische Gl. (43) eine oder drei reelle Wurzeln hat.

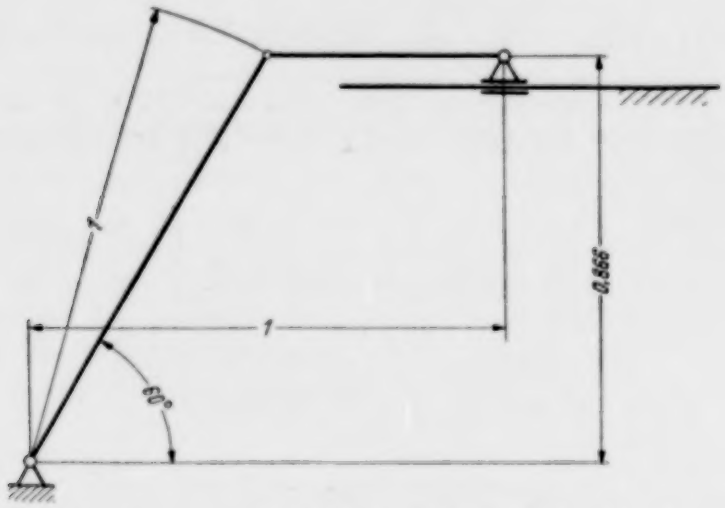

Abb. 9. Schubschwinge nach dem 3. Beispiel für $\lambda = 60°$ und $a = 1$.

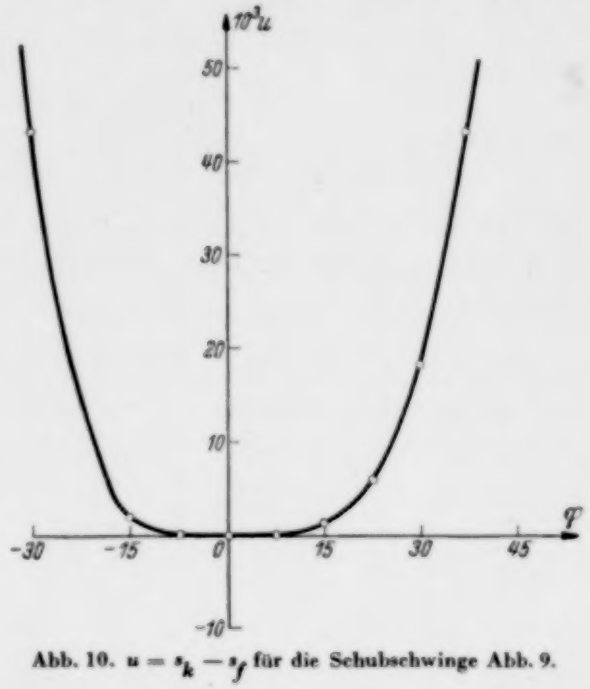

Abb. 10. $u = s_k - s_f$ für die Schubschwinge Abb. 9.

Aus den gegebenen Werten für die Ableitungen erster bis vierter Ordnung im Nullpunkt der gegebenen Funktion erhält man aus (52) bis (59) für die $\mathfrak{F}$-Größen folgende Werte:

Abl.	$\mathfrak{F}(\varphi)$	$\mathfrak{F}(\cdot\varphi)$	$\mathfrak{F}(\cdot)$
1	$0 + i\,1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\,0$	0
2	$-1 + i\,0$	$1 + i\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}$
3	$0 - i\,1$	$-\frac{7}{2}\sqrt{3} + i\,3$	$3\sqrt{3}$
4	$1 + i\,0$	$-10 - i\,10\sqrt{3}$	-18

Die $\mathfrak{d}$-Determinanten (36) bis (40) können wie im zweiten Beispiel mittels der Beziehungen (88) bis (93) der I. Mitteilung berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d} &= -432\,,\\
\mathfrak{d}_1 &= -72 + i\,31{,}5\sqrt{3}\,,\\
\mathfrak{d}_2 &= -144 - i\,58{,}5\sqrt{3}\,,\\
\mathfrak{d}_3 &= -63 - i\,153\sqrt{3}\,,\\
\mathfrak{d}_4 &= -99 - i\,9\sqrt{3}\,.
\end{aligned}$$

Für die Koeffizienten der Gl. (43) ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d}_4\,\bar{\mathfrak{d}}_4 &= +10\,044\,,\\
\mathfrak{d}_3\,\bar{\mathfrak{d}}_4 + \bar{\mathfrak{d}}_3\,\mathfrak{d}_4 - \mathfrak{d}_2\,\bar{\mathfrak{d}}_4 - \bar{\mathfrak{d}}_2\,\mathfrak{d}_4 &= -10\,935\,,\\
\mathfrak{d}_3\,\bar{\mathfrak{d}}_3 - \bar{\mathfrak{d}}_1\,\mathfrak{d}_4 - \mathfrak{d}_1\,\bar{\mathfrak{d}}_4 - \bar{\mathfrak{d}}_2\,\mathfrak{d}_3 - \mathfrak{d}_2\,\bar{\mathfrak{d}}_3 &= -10\,206\,,\\
\mathfrak{d}_1\,\bar{\mathfrak{d}}_3 + \bar{\mathfrak{d}}_1\,\mathfrak{d}_3 &= +19\,845\,.
\end{aligned}$$

Gl. (43) erhält damit folgende Form

$$(2p)^3 - 1{,}088\,71\,(2p)^2 - 1{,}016\,13\,(2p) + 1{,}975\,81 = 0\,.$$

Aus dieser Gleichung erhält man die Lösung

$$2p = -1{,}182\,77 \quad \text{und damit} \quad p = -0{,}591\,39\,.$$

Die beiden anderen Wurzeln der kubischen Gleichung sind komplex und deshalb für diesen Zweck unbrauchbar.

Aus (41) ergibt sich

$$q = -0{,}528\,5$$

und aus (34)

$$\mathfrak{a} = -0{,}125\,22 + i\,0{,}579\,74\,.$$

Hieraus folgt

$$a = +0{,}584\,33 \quad \text{und} \quad \alpha = 102{,}38^\circ\,.$$

In Abb. 11 ist das Getriebe mit den errechneten Abmessungen dargestellt. Abb. 12 zeigt die Funktion $u = f(\varphi)$ für dieses Getriebe nach folgenden aus (26b) und (28) bis (30) errechneten Werten:

$\varphi =$	-30	-15	$-7{,}5$	0	$7{,}5$	15	$22{,}5$	30	$37{,}5$	45	$52{,}5$	60	$67{,}5$
$10^3\,u =$	-164	-38	-9	0	-8	-27	-53	-80	-101	-113	-112	-97	-67

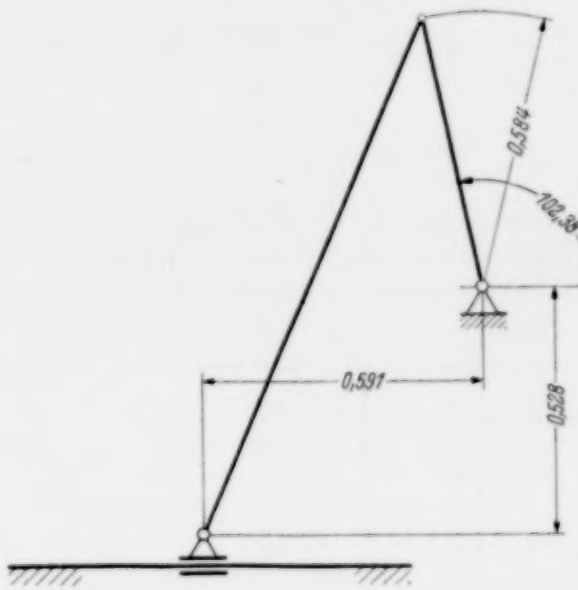

Bild 11. Schubschwinge nach dem 4. Beispiel.

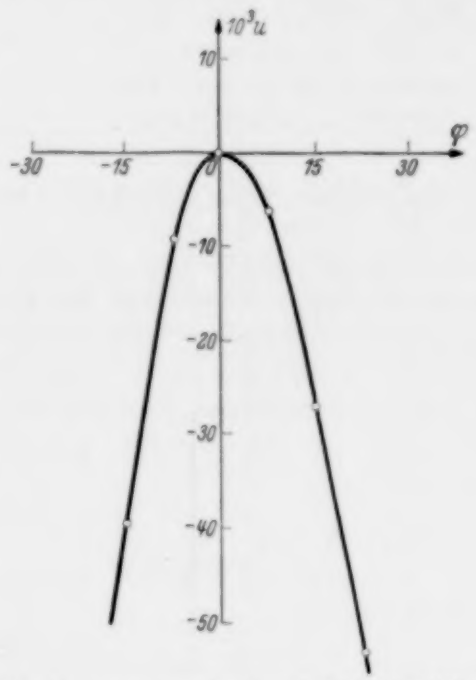

Abb. 12. $u = s_h - s_f$ für die Schubschwinge Abb. 11.

Fünftes Zahlenbeispiel. Aus der Funktion

$$s = \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}$$

sind die Ableitungen im Nullpunkt bis zur zweiten Ordnung und damit die Krümmung der Kurve und Punkt 2 (Abb. 2) mit der Zuordnung $\varphi_2 = 30^\circ$ und $s_2 = 1/2$ gegeben.

Aus dem ersten und dritten Beispiel ergeben sich folgende Werte für die $\mathfrak{F}$-Größen:

	$\mathfrak{F}(\varphi)$	$\mathfrak{F}(s\,\varphi)$	$\mathfrak{F}(s)$
1. Abl. i. 0-Pkt.	$0 + i\,1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\,0$	0
2. Abl. i. 0-Pkt.	$-1 + i\,0$	$1 + i\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}$
Pkt. 2	$\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 + i\,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{3} + i\,\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Die $\mathfrak{d}$-Determinanten der Gl. (17) bis (22) ergeben mittels der (64) I. Mitteilung folgende Werte:

$$\mathfrak{d} = +i\,(1-5\sqrt{3}) = +i\,0{,}133\,975\,,$$
$$\mathfrak{d}_1 = +0{,}625-0{,}25\sqrt{3}+i\,(2-1{,}125\sqrt{3}) = +0{,}191\,987+i\,0{,}051\,443\,,$$
$$\mathfrak{d}_2 = -1{,}375+0{,}75\sqrt{3}-i\,(1-0{,}625\sqrt{3}) = -0{,}075\,962+i\,0{,}082\,532\,,$$
$$\mathfrak{d}_3 = -1{,}125+0{,}625\sqrt{3}+i\,(0{,}5-0{,}375\sqrt{3}) = -0{,}042\,468-i\,0{,}149\,519\,,$$
$$\mathfrak{d}_4 = +3{,}5-2\sqrt{3}+i\,(2-\sqrt{3}) = +0{,}035\,898+i\,0{,}267\,949\,,$$
$$\mathfrak{d}_5 = +i\,(2{,}5-1{,}5\sqrt{3}) = -i\,0{,}098\,076\,2\,.$$

Zur Darstellung der Funktion $a = f(\alpha)$ ergeben sich aus (24) folgende Berechnungswerte:

α	$d_{x4}\sin\alpha+d_{y4}\cos\alpha$	$2\,d_{x1}\sin\alpha\cos\alpha+2\,d_{y1}\cos^2\alpha-d_{y1}+d_{y2}-0{,}5\,d_{y5}$	$d_{x3}\sin\alpha+d_{y3}\cos\alpha$	a_1	a_2
58,9	+ 0,169 128 6	+ 0,277 383 3	− 0,113 587 7	0,849 3	0,790 8
60	+ 0,165 063 5	+ 0,272 116 2	− 0,111 538 1	0,885 1	0,763 4
75,1	+ 0,103 614 3	+ 0,182 377 8	− 0,079 498 5	0,965 4	0,794 7
90	+ 0,035 898 4	+ 0,080 127 0	− 0,042 468 3	1,366 0	0,866 0
92,97	+ 0,021 986 7	+ 0,060 562 4	− 0,034 675 3	1,942 7	0,811 8

Die Werte

$$\alpha = 58{,}9^\circ\,,\quad a = 0{,}849\,,$$
$$\alpha = 75{,}1^\circ\,,\quad a = 0{,}795\,,$$
$$\alpha = 92{,}97\,,\quad a = 0{,}812\,.$$

entsprechen den im sechsten Beispiel errechneten Werten für vier gegebene Bedingungen.

Für den Winkel $\alpha = 97{,}6^\circ$ ist $d_{x4}\sin\alpha + d_{y4}\cos\alpha = 0$. In dieser Richtung läuft die Kurve ins Unendliche; die Gerade durch den Nullpunkt in dieser Richtung ist eine Asymptote der Kurve.

Für den Winkel $\alpha = 99^\circ$ ist $d_{x3}\sin\alpha + d_{y3}\cos\alpha = 0$; die Gerade durch den Nullpunkt in dieser Richtung ist Tangente der Kurve im Nullpunkt.

In Abb. 13 ist die Funktion $a = f(\alpha)$ dargestellt. Als Beispiel ist für $\alpha = 90^\circ$ und $a = 1{,}366$ aus (25) der Wert für $\mathfrak{r}$ errechnet worden:

$$\mathfrak{r} = +\,\bar{i}\;1{,}183\,2\,.$$

Damit ist $p = 0$ und $q = +1{,}183\,2$. Abb. 14 zeigt das Getriebe mit diesen Abmessungen. In Abb. 15 ist die Funktion $u = f(\varphi)$ für dieses Getriebe dargestellt nach folgenden mit (26b) und (28) bis (30) berechneten Werten:

$\varphi =$	− 30	− 15	− 7,5	0	7,5	15	22,5	30	37,5	45	52,5	60	67,5
$10^3\,u =$	− 250	− 49	− 12	0	− 5	− 18	− 22	0	+ 74	—	—	—	—

Sechstes Zahlenbeispiel. Zu den Bedingungen des fünften Beispiels ist als weitere noch die erste Ableitung im Punkt 2 (Abb. 2) und damit die Steigung der Kurve an dieser Stelle gegeben.

Für Punkt 2 mit $\varphi_2 = \pi/6$ ergibt sich aus (62):

$$s_2' = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

Die Kurve hat also im Punkt 2 dieselbe Steigung wie im Nullpunkt.

Die Getriebeabmessungen können wie im zweiten und vierten Beispiel aus (43), (41 a) und (34) berechnet werden.

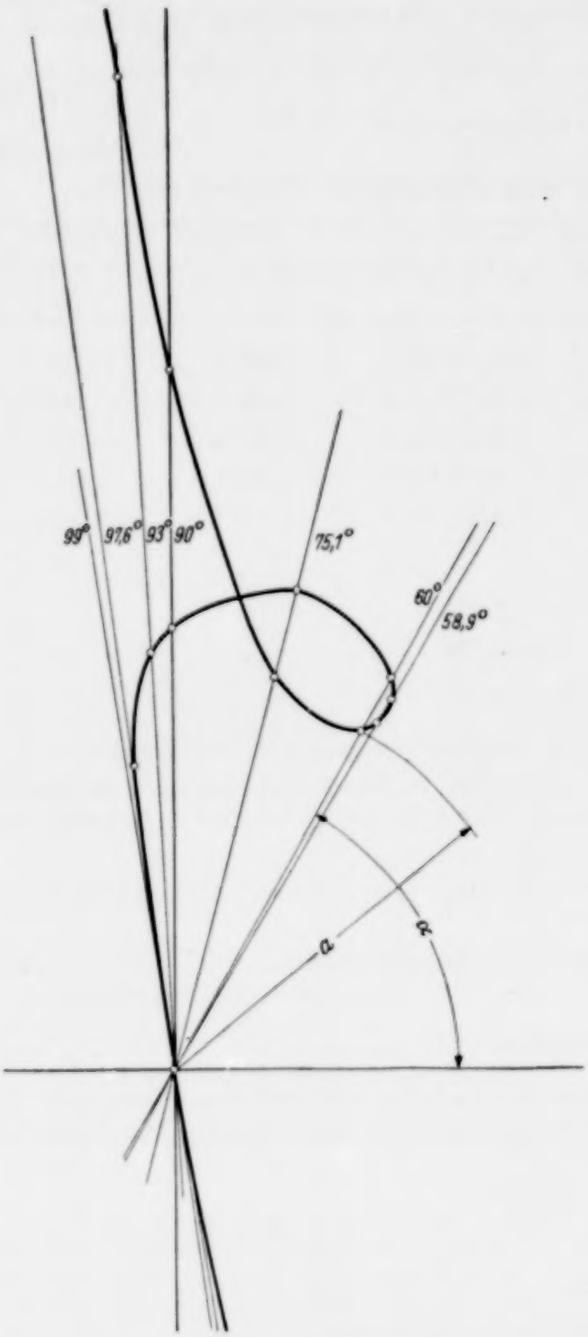

Abb. 13. Darstellung der Kurve $a = f(\alpha)$ nach dem 5. Beispiel.

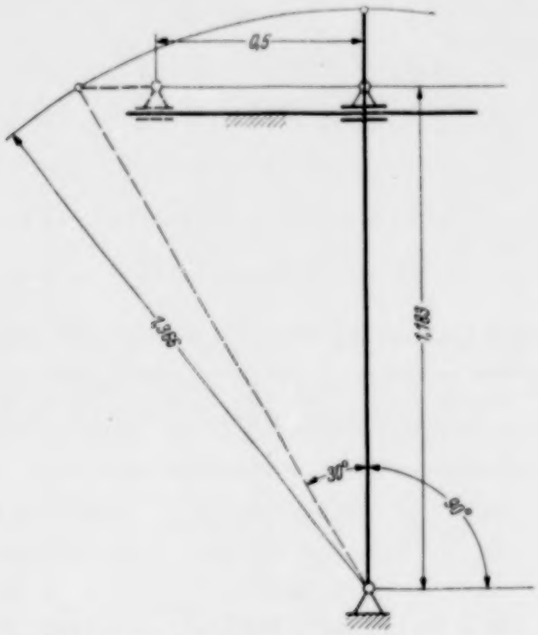

Abb. 14. Schubschwinge nach dem 5. Beispiel für $\alpha = 90°$ und $a = 1{,}366$.

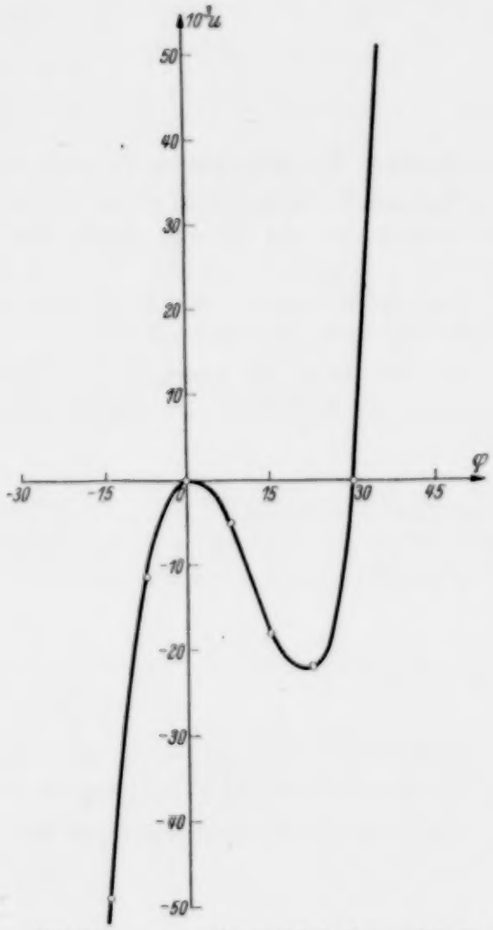

Abb. 15. $u = s_k - s_f$ für die Schubschwinge Abb. 14.

Die Werte für die $\mathfrak{F}$-Größen können dem zweiten und vierten Beispiel entnommen werden:

	$\mathfrak{F}(\varphi)$	$\mathfrak{F}(\circ\varphi)$	$\mathfrak{F}(\circ)$
1. Abl. i. 0-Pkt.	$0 + i\,1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\,0$	0
2. Abl. i. 0-Pkt.	$-1 + i\,0$	$1 + i\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}$
Pkt. 2	$\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 + i\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{3} + i\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1. Abl. i. Pkt. 2	$-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Die Berechnung der $\mathfrak{d}$-Determinanten nach (36) bis (40) führen mit Hilfe von (88) bis (93) der I. Mitteilung auf folgende Werte:

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{4}(-21 + 12\sqrt{3}), \qquad 10^3\,\mathfrak{d} = -53{,}847\,5,$$

$$\mathfrak{d}_1 = \frac{1}{16}(3 - 2\sqrt{3}) + i\,\frac{3}{16}(26 - 15\sqrt{3}), \qquad 10^3\,\mathfrak{d}_1 = -29{,}006\,4 + i\;3{,}607\,13,$$

$$\mathfrak{d}_2 = \frac{1}{8}(-7 + 4\sqrt{3}) - i\,\frac{1}{8}(33 - 19\sqrt{3}), \qquad 10^3\,\mathfrak{d}_2 = -8{,}974\,60 - i\;11{,}379\,4,$$

$$\mathfrak{d}_3 = \frac{1}{8}(45 - 26\sqrt{3}) - i\,\frac{1}{8}(9 - 5\sqrt{3}), \qquad 10^3\,\mathfrak{d}_3 = -4{,}165\,13 - i\;42{,}468\,3,$$

$$\mathfrak{d}_4 = \frac{1}{8}(-59 + 34\sqrt{3}) + i\,\frac{1}{8}(26 - 15\sqrt{3}), \qquad 10^3\,\mathfrak{d}_4 = -13{,}784\,1 + i\;2{,}404\,75.$$

Die Koeffizienten der Gl. (43) ergeben sich wie folgt:

$$\mathfrak{d}_4\,\bar{\mathfrak{d}}_4 = +\frac{1}{64}(8\,300 - 4\,792\sqrt{2}),$$

$$\mathfrak{d}_3\,\bar{\mathfrak{d}}_4 + \bar{\mathfrak{d}}_3\,\mathfrak{d}_4 - \mathfrak{d}_2\,\bar{\mathfrak{d}}_4 - \bar{\mathfrak{d}}_2\,\mathfrak{d}_4 = -\frac{1}{32}(4\,874 - 2\,814\sqrt{3}),$$

$$\mathfrak{d}_3\,\bar{\mathfrak{d}}_3 - \mathfrak{d}_1\,\bar{\mathfrak{d}}_4 - \bar{\mathfrak{d}}_1\,\mathfrak{d}_4 - \mathfrak{d}_2\,\bar{\mathfrak{d}}_3 - \bar{\mathfrak{d}}_2\,\mathfrak{d}_3 = +\frac{1}{64}(627 - 362\sqrt{3}),$$

$$\mathfrak{d}_1\,\bar{\mathfrak{d}}_3 + \bar{\mathfrak{d}}_1\,\mathfrak{d}_3 = +\frac{3}{64}(362 - 209\sqrt{3}).$$

Gl. (43) erhält mit diesen Zahlenwerten folgende Form:

$$(2p)^3 - 1{,}437\,(2p)^2 - 0{,}189\,7\,(2p) + 0{,}325 = 0.$$

Diese kubische Gleichung hat drei reelle Wurzeln

$$2p_1 = +0{,}495, \quad 2p_2 = +1{,}408, \quad 2p_3 = -0{,}466.$$

Damit wird

$$p_1 = +0{,}248, \quad p_2 = +0{,}704, \quad p_3 = -0{,}233.$$

Aus (41a) und (34) ergeben sich die entsprechenden Werte q, a und α zu

$$q_1 = +0{,}744\,5, \quad q_2 = +0{,}540\,8, \quad q_3 = +0{,}557\,4,$$
$$a_1 = +0{,}793\,3, \quad a_2 = +0{,}847\,6, \quad a_3 = +0{,}810\,6,$$
$$\alpha = 75{,}1^\circ, \quad \alpha_2 = 58{,}9^\circ, \quad \alpha = 92{,}97^\circ.$$

In Abb. 16, 17, und 19 sind die drei Getriebe dargestellt. Das Getriebe in Abb. 16 ist praktisch nicht brauchbar, weil sich die Getriebeglieder nicht von der einen Stellung in die andere ohne Auseinanderbau überführen lassen.

Für die beiden anderen Lösungen ist die Funktion $u = f(\varphi)$ in Abb. 18 und 20 dargestellt. Den Kurven liegen folgende mit (26b) und (28) bis (30) berechneten Werte zugrunde.

Lösung 2:

$\varphi =$	−30	−15	−7,5	0	7,5	15	22,5	30	37,5	45	52,5	60	67,5
$10^3\,u =$	+56	+2	0	0	0	0	0	0	+2	+13	+44	+104	+198

Lösung 3:

$\varphi =$	−30	−15	−7,5	0	7,5	15	22,5	30	37,5	45	52,5	60	67,5
$10^3\,u =$	−81	−8	−1	0	0	0	0	0	0	+2	+3	−7	−68

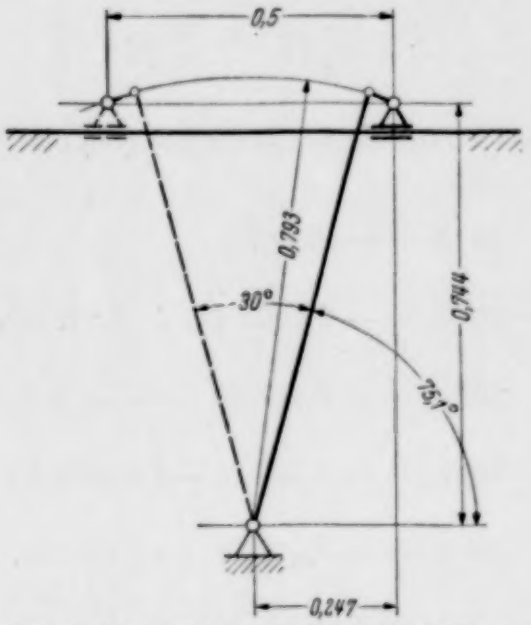

Abb. 16. Schubschwinge nach dem 6. Beispiel Lösung 1.

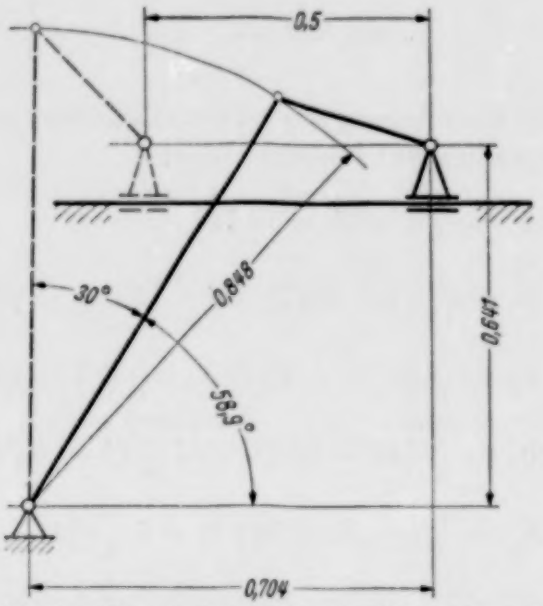

Abb. 17. Schubschwinge nach dem 6. Beispiel Lösung 2.

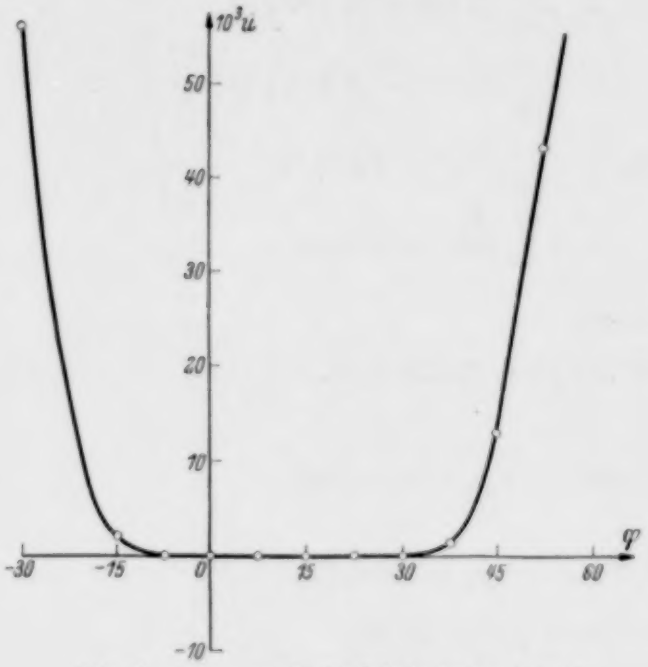

Abb. 18. $u = s_k - s_f$ für die Schubschwinge Abb. 17.

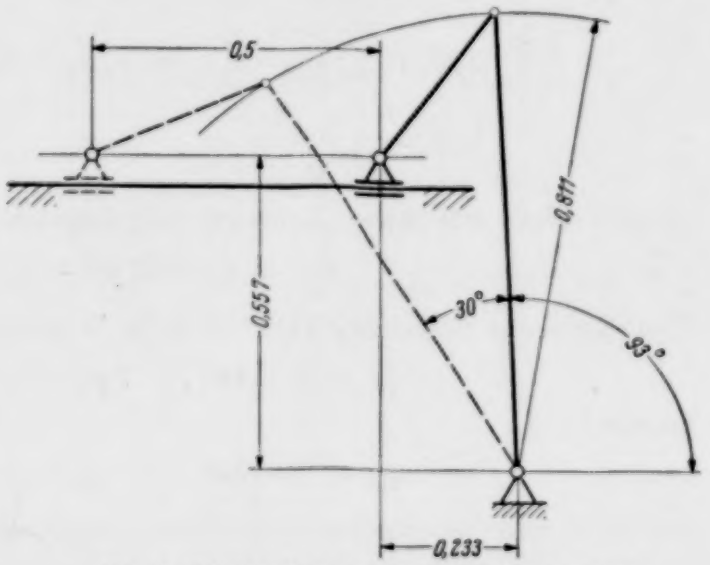

Abb. 19. Schubschwinge nach dem 6. Beispiel Lösung 3.

4. Ermittlung der Abmessungen von Gelenkvierecken aus gegebenen Punkten der Koppelkurve und Anwendung auf die Synthese sechsgliedriger Kurbelgetriebe. Wie aus analytischen Untersuchungen bekannt ist, ist die Koppelkurve eines viergliedrigen Kurbelgetriebes eine Kurve sechsten Grades[1]. Eine solche Kurve ist durch neun Punkte in einer Ebene bestimmt d. h.: Werden neun Punkte in einer Ebene gegeben, so muß sich durch diese eine ganz bestimmte Koppelkurve hindurchlegen lassen. Ferner müssen sich aus diesen neun Punkten drei Gelenk-

[1] *H. Alt*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923) S. 13.

vierecke nach Lage und Abmessungen ermitteln lassen, deren einer Koppelpunkt die Koppelkurve beschreibt; denn nach *Roberts*[1] läßt sich jede Koppelkurve durch drei Gelenkvierecke verwirklichen. Das an sich bekannte Problem ist bisher weder algebraisch noch geometrisch gelöst worden. Es läßt sich jedoch mit der komplexen Darstellung in der *Gauß*schen Zahlenebene lösen und führt zu verhältnismäßig einfachen Beziehungen.

Das Problem soll folgendermaßen formuliert werden: Die Punkte C_1 bis C_9 (Abb. 21) sind in der *Gauß*schen Zahlenebene gegeben durch die Vektoren $\mathfrak{r}_1$ bis $\mathfrak{r}_9$. Im allgemeinen Ansatz soll ν als Index verwendet werden. Zur Bestimmung des Gelenkviereckes A_0ABB_0 mit dem Koppelpunkt C, dessen Koppelkurve durch die Punkte C_1 bis C_9 hindurchgehen soll, sind neun Bestimmungsstücke erforderlich: Die Drehpunkte im Gestell A_0 und B_0 sind durch die beiden Vektoren $\mathfrak{r}_a$ und $\mathfrak{r}_b$ erfaßt, die je zwei Bestimmungstücke, nämlich Größe und Richtung, enthalten. Die weiteren Bestimmungsstücke des Gelenkvereckes sind die Lenkerlängen a und b, die Längen c und d des Koppeldreieckes ABC und der Winkel $(\delta - \gamma)$ zwischen den Längen c und d.

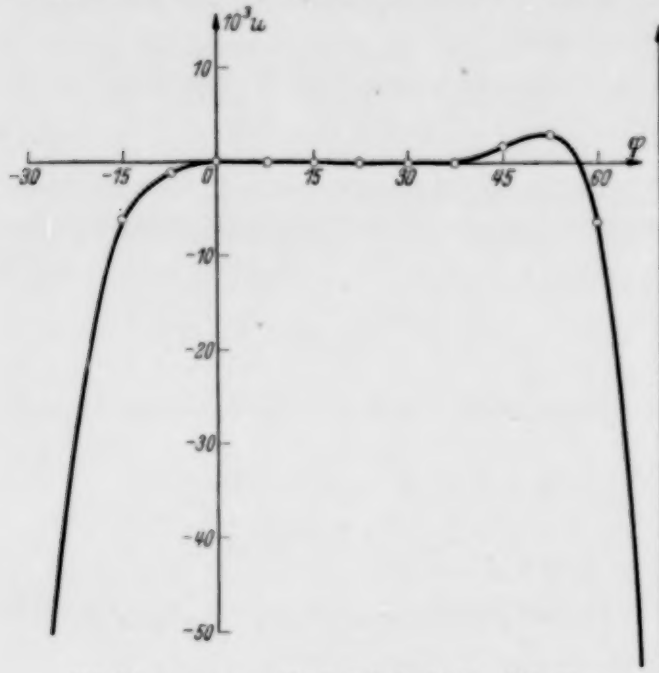

Abb. 20. $u = s_k - s_f$ für die Schubschwinge Abb. 19.

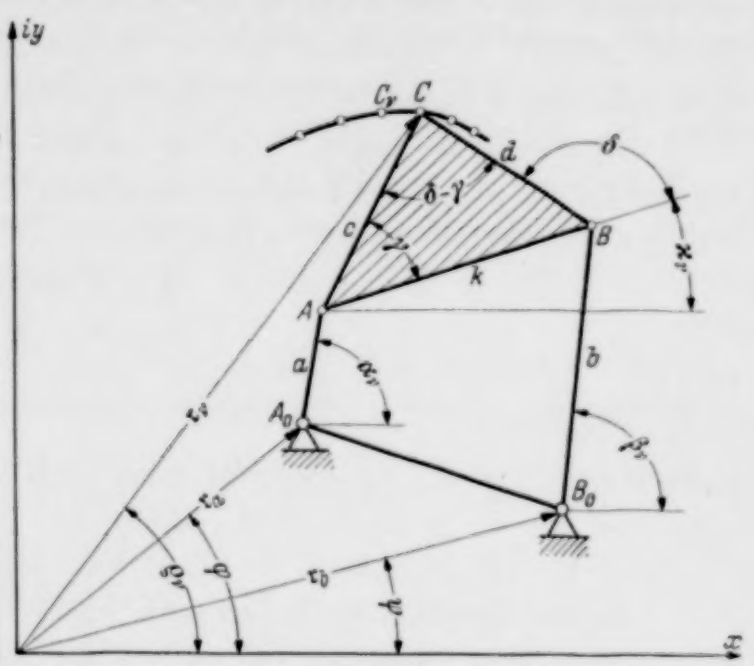

Abb. 21. Gelenkviereck mit Koppelkurve des Koppelpunktes C.

Mit den in Abb. 21 eingetragenen Bezeichnungen können folgende Vektorgleichungen aufgestellt werden:

$$a\, e^{i\alpha_\nu} = \mathfrak{r}_\nu - \mathfrak{r}_a - c\, e^{i(\gamma+\varkappa_\nu)}, \tag{66}$$

$$b\, e^{i\beta_\nu} = \mathfrak{r}_\nu - \mathfrak{r}_b - d\, e^{i(\delta+\varkappa_\nu)}, \tag{67}$$

Denkt man sich das Getriebe an der reellen Zahlenachse gespiegelt, so erhält man entsprechende Gleichungen mit den konjugiert-komplexen Größen:

$$a\, e^{-i\alpha_\nu} = \bar{\mathfrak{r}}_\nu - \bar{\mathfrak{r}}_a - c\, e^{-i(\gamma+\varkappa_\nu)}, \tag{68}$$

$$b\, e^{-i\beta_\nu} = \bar{\mathfrak{r}}_\nu - \bar{\mathfrak{r}}_b - d\, e^{-i(\delta+\varkappa_\nu)}. \tag{69}$$

Werden jeweils die Gleichungen (66) und (67) und die Gleichungen (68) und (69) miteinander multipliziert, so ergibt sich

$$a^2 = (\mathfrak{r}_\nu - \mathfrak{r}_a - c\, e^{i(\gamma+\varkappa_\nu)})\,(\bar{\mathfrak{r}}_\nu - \bar{\mathfrak{r}}_a - c\, e^{-i(\gamma+\varkappa_\nu)}), \tag{70}$$

$$b^2 = (\mathfrak{r}_\nu - \mathfrak{r}_b - d\, e^{i(\delta+\varkappa_\nu)})\,(\bar{\mathfrak{r}}_\nu - \bar{\mathfrak{r}}_b - d\, e^{-i(\delta+\varkappa_\nu)}). \tag{71}$$

Um aus diesen beiden Gleichungen den Winkel $\varkappa_\nu$ eliminieren zu können, werden sie durch Umformung und Zusammenfassung auf folgende Form gebracht:

$$e^{i(\delta+\varkappa_\nu)}(\mathfrak{A}\,\bar{\mathfrak{B}} - \bar{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B}) = q\cdot\mathfrak{A} - p\,\mathfrak{B}, \tag{72}$$

$$e^{-i(\delta+\varkappa_\nu)}(\mathfrak{A}\,\bar{\mathfrak{B}} - \bar{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B}) = p\,\bar{\mathfrak{B}} - q\,\bar{\mathfrak{A}}. \tag{73}$$

[1] S. *Roberts*, Math. Soc. Proc. 7 (1875) S. 14.

Multipliziert man diese beiden Gleichungen miteinander, so erhält man

$$(\mathfrak{A}\,\overline{\mathfrak{B}} - \overline{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B})^2 + (q\,\mathfrak{A} - p\,\mathfrak{B})\,(q\,\overline{\mathfrak{A}} - p\,\overline{\mathfrak{B}}) = 0\,. \tag{74}$$

Hierin bedeutet, wenn man für $c\,e^{i(\delta-\gamma)} = \mathfrak{c}$ setzt;

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{r}_\nu - \mathfrak{r}_a)\,\mathfrak{c}\,, \qquad \overline{\mathfrak{A}} = (\overline{\mathfrak{r}}_\nu - \overline{\mathfrak{r}}_a)\,\overline{\mathfrak{c}}\,, \tag{75}$$

$$\mathfrak{B} = (\mathfrak{r}_\nu - \mathfrak{r}_b)\,d\,, \qquad \overline{\mathfrak{B}} = (\overline{\mathfrak{r}}_\nu - \overline{\mathfrak{r}}_b)\,d\,, \tag{76}$$

$$p = (\mathfrak{r}_\nu - \mathfrak{r}_a)\,(\overline{\mathfrak{r}}_\nu - \overline{\mathfrak{r}}_a) + c^2 - a^2\,, \tag{77}$$

$$q = (\mathfrak{r}_\nu - \mathfrak{r}_b)\,(\overline{\mathfrak{r}}_\nu - \overline{\mathfrak{r}}_b) + d^2 - b^2\,. \tag{78}$$

Setzt man in (73) $\nu = 1$ bis 9 ein, so erhält man neun homologe Gleichungen zur Bestimmung der neun Unbekannten $r_a, \varphi, r_b, \psi, a, b, c, d, \delta - \gamma$.

Werden die Klammerausdrücke in (73) unter Berücksichtigung der Beziehungen (75) bis (78) ausmultipliziert — eine etwas mühsame, wenn auch nicht schwierige Arbeit — und die Glieder geordnet, so erhält man eine Gleichung von folgender Form:

$$\begin{aligned} &E_1\,r_\nu^6 + \mathfrak{E}_2\,r_\nu^4\,\mathfrak{r}_\nu + \overline{\mathfrak{E}}_2\,r_\nu^4\,\overline{\mathfrak{r}}_\nu + E_3\,r_\nu^4 + \mathfrak{E}_4\,r_\nu^2\,\mathfrak{r}_\nu^2 + \overline{\mathfrak{E}}_4\,r_\nu^2\,\overline{\mathfrak{r}}_\nu^2 + \mathfrak{E}_5\,r_\nu^2\,\mathfrak{r}_\nu + \overline{\mathfrak{E}}_5\,r_\nu^2\,\overline{\mathfrak{r}}_\nu + \mathfrak{E}_6\,\mathfrak{r}_\nu^3 + \overline{\mathfrak{E}}_6\,\overline{\mathfrak{r}}_\nu^3 \\ &\quad - F_1\,r_\nu^2 - \mathfrak{F}_2\,\mathfrak{r}_\nu^2 - \overline{\mathfrak{F}}_2\,\overline{\mathfrak{r}}_\nu^2 - \mathfrak{F}_3\,\mathfrak{r}_\nu - \overline{\mathfrak{F}}_3\,\overline{\mathfrak{r}}_\nu - F_4 = 0\,. \end{aligned} \tag{79}$$

Die $\mathfrak{E}$- und $\mathfrak{F}$-Größen sind Funktionen der neun Unbekannten, von denen für die weitere Entwicklung besonders die $\mathfrak{E}$-Größen interessieren. Zur Abkürzung ist in den folgenden Beziehungen

$$r_a^2 + c^2 - a^2 = u^2\,, \tag{80}$$

$$r_b^2 + d^2 - b^2 = v^2 \tag{81}$$

gesetzt:

$$E_1 = (\mathfrak{c} - d)\,(\overline{\mathfrak{c}} - d)\,, \tag{82}$$

$$\mathfrak{E}_2 = -\,(\overline{\mathfrak{c}} - d)\,[(\mathfrak{c} - d)\,(\overline{\mathfrak{r}}_a + \overline{\mathfrak{r}}_b) + (\overline{\mathfrak{r}}_b\,\mathfrak{c} - \overline{\mathfrak{r}}_a\,d)]\,, \tag{83}$$

$$\begin{aligned} E_3 = {}& d^2\,(\mathfrak{c} - \overline{\mathfrak{c}})^2 + (\overline{\mathfrak{c}} - d)\,(\mathfrak{c}\,v^2 - d u^2) + (\mathfrak{c} - d)\,(\overline{\mathfrak{c}}\,v^2 - d u^2) + (\mathfrak{r}_a\,\overline{\mathfrak{c}} - \mathfrak{r}_b\,d)\,(\overline{\mathfrak{r}}_a\,\mathfrak{c} - \overline{\mathfrak{r}}_b\,d), \\ &+ (\overline{\mathfrak{c}} - d)\,[(\mathfrak{r}_a + \mathfrak{r}_b)\,(\overline{\mathfrak{r}}_b\,\mathfrak{c} - \overline{\mathfrak{r}}_a\,d) + (\mathfrak{r}_a\,\overline{\mathfrak{r}}_b\,\mathfrak{c} - \overline{\mathfrak{r}}_a\,\mathfrak{r}_b\,d)] \\ &+ (\mathfrak{c} - \mathfrak{d})\,[(\overline{\mathfrak{r}}_a + \overline{\mathfrak{r}}_b)\,(\mathfrak{r}_b\,\overline{\mathfrak{c}} - \mathfrak{r}_a\,d) + (\overline{\mathfrak{r}}_a\,\mathfrak{r}_b\,\overline{\mathfrak{c}} - \mathfrak{r}_a\,\overline{\mathfrak{r}}_b\,d)]\,, \end{aligned} \tag{84}$$

$$\mathfrak{E}_4 = (\overline{\mathfrak{c}} - \mathfrak{d})\,[(\overline{\mathfrak{r}}_a + \overline{\mathfrak{r}}_b)\,(\mathfrak{r}_b\,\overline{\mathfrak{c}} - \overline{\mathfrak{r}}_a\,d) + \overline{\mathfrak{r}}_a\,\overline{\mathfrak{r}}_b\,(\mathfrak{c} - d)]\,, \tag{85}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_5 = {}& -\,2\,d^2\,(\mathfrak{c} - \overline{\mathfrak{c}})\,(\overline{\mathfrak{r}}_b\,\mathfrak{c} - \overline{\mathfrak{r}}_a\,\overline{\mathfrak{c}}) - (\overline{\mathfrak{c}}\,v^2 - d u^2)\,[(\overline{\mathfrak{c}} - d)\,(\overline{\mathfrak{r}}_a + \overline{\mathfrak{r}}_b) + (\overline{\mathfrak{r}}_b\,\mathfrak{c} - \overline{\mathfrak{r}}_a\,d)] \\ &- \overline{\mathfrak{r}}_a\,\overline{\mathfrak{r}}_b\,(\mathfrak{c} - d)\,\mathfrak{r}_b\,\overline{\mathfrak{c}} - \mathfrak{r}_a\,d) - (\overline{\mathfrak{r}}_b\,\mathfrak{c} - \overline{\mathfrak{r}}_a\,d)\,(\overline{\mathfrak{r}}_a\,\mathfrak{r}_b\,\overline{\mathfrak{c}} - \mathfrak{r}_a\,\overline{\mathfrak{r}}_b\,d) \\ &- (\overline{\mathfrak{r}}_a + \overline{\mathfrak{r}}_b)\,(\overline{\mathfrak{c}} - d)\,(\mathfrak{r}_a\,\overline{\mathfrak{r}}_b\,\mathfrak{c} - \overline{\mathfrak{r}}_a\,\mathfrak{r}_b\,d)\,, \end{aligned} \tag{86}$$

$$\mathfrak{E}_6 = -\,\overline{\mathfrak{r}}_a\,\overline{\mathfrak{r}}_b\,(\overline{\mathfrak{c}} - d)\,(\overline{\mathfrak{r}}_b\,\mathfrak{c} - \overline{\mathfrak{r}}_a\,d)\,. \tag{87}$$

Werden in (79) für $\mathfrak{r}_\nu$ die gegebenen Vektoren $\mathfrak{r}_1$ bis $\mathfrak{r}_9$ eingesetzt, so erhält man neun homologe Gleichungen. Die $\mathfrak{F}$-Größen, deren Zusammensetzung aus den neun Unbekannten hier nicht interessiert und deshalb nicht angegeben zu werden braucht, lassen sich durch Zusammenfassen von jeweils sechs der neun Gleichungen eliminieren. Zu diesem Zweck werden die $\mathfrak{F}$-Größen auf die linke und die $\mathfrak{E}$-Größen auf die rechte Seite der Gleichung gebracht. Gleichung (79) erhält damit folgende Form:

$$\begin{aligned} F_1\,r_\nu^2 + \mathfrak{F}_2\,\mathfrak{r}_\nu^2 + \overline{\mathfrak{F}}_2\,\overline{\mathfrak{r}}_\nu^2 + \mathfrak{F}_3\,\mathfrak{r}_\nu + \overline{\mathfrak{F}}_3\,\overline{\mathfrak{r}}_\nu + F_4 = {}& E_1\,r_\nu^6 + \mathfrak{E}_2\,r_\nu^4\,\mathfrak{r}_\nu + \overline{\mathfrak{E}}_2\,r_\nu^4\,\overline{\mathfrak{r}}_\nu \\ &+ E_3\,r_\nu^4 + \mathfrak{E}_4\,r_\nu^2\,\mathfrak{r}_\nu^2 + \overline{\mathfrak{E}}_4\,r_\nu^2\,\overline{\mathfrak{r}}_\nu^2 + \mathfrak{E}_5\,r_\nu^2\,\mathfrak{r}_\nu + \overline{\mathfrak{E}}_5\,r_\nu^2\,\overline{\mathfrak{r}}_\nu + \mathfrak{E}_6\,\mathfrak{r}_\nu^3 + \overline{\mathfrak{E}}_6\,\overline{\mathfrak{r}}_\nu^3\,. \end{aligned} \tag{88}$$

Wird $\nu = 1$ bis 6 eingesetzt, so erhält man durch Zusammenfassen der sechs Gleichungen

$$F_1 \quad \mathfrak{d}_1 = E_1\,\mathfrak{d}_{11}^a + \mathfrak{E}_2\,\mathfrak{d}_{12}^a + \overline{\mathfrak{E}}_2\,\mathfrak{d}_{13}^a + E_3\,\mathfrak{d}_{14}^a + \dots\,\overline{\mathfrak{E}}_6\,\mathfrak{d}_{10}^a\,, \tag{89}$$

$$\mathfrak{F}_2\,\mathfrak{d}_1 = E_1\,\mathfrak{d}_{11}^b + \mathfrak{E}_2\,\mathfrak{d}_{12}^b + \cdots\,, \tag{90}$$

$$\overline{\mathfrak{F}}_2\,\mathfrak{d}_1 = E_1\,\mathfrak{d}_{11}^c + \mathfrak{E}_2\,\mathfrak{d}_{12}^c + \cdots\,, \tag{91}$$

$$\mathfrak{F}_3\,\mathfrak{d}_1 = E_1\,\mathfrak{d}_{11}^d + \mathfrak{E}_2\,\mathfrak{d}_{12}^d + \cdots\,, \tag{92}$$

$$\overline{\mathfrak{F}}_3\,\mathfrak{d}_1 = E_1\,\mathfrak{d}_{11}^e + \mathfrak{E}_2\,\mathfrak{d}_{12}^e + \cdots\,, \tag{93}$$

$$F_4\,\mathfrak{d}_1 = E_1\,\mathfrak{d}_{11}^f + \mathfrak{E}_2\,\mathfrak{d}_{12}^f + \cdots\,. \tag{94}$$

Werden sechs von den neun Gleichungen in anderer Weise zusammengefaßt, z. B. für $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 7$, so erhält man

$$F_1 \mathfrak{d}_2 = E_1 \mathfrak{d}_{21}^a + \mathfrak{E}_2 \mathfrak{d}_{22}^a + \bar{\mathfrak{E}}_3 \mathfrak{d}_{23}^a + E_3 \mathfrak{d}_{24}^a + \cdots \bar{\mathfrak{E}}_6 \mathfrak{d}_{20}^a , \tag{95}$$

$$\mathfrak{F}_2 \mathfrak{d}_2 = E_1 \mathfrak{d}_{21}^b + \mathfrak{E}_2 \mathfrak{d}_{22}^b , \tag{96}$$

$$\bar{\mathfrak{F}}_2 \mathfrak{d}_2 = E_1 \mathfrak{d}_{21}^c + \cdots , \tag{97}$$

$$\mathfrak{F}_4 \mathfrak{d}_2 = E_1 \mathfrak{d}_{21}^d + \cdots , \tag{98}$$

$$\bar{\mathfrak{F}}_4 \mathfrak{d}_2 = E_1 \mathfrak{d}_{21}^e + \cdots , \tag{99}$$

$$F_5 \mathfrak{d}_2 = E_1 \mathfrak{d}_{21}^f + \cdots . \tag{100}$$

Mit anderen Kombinationen der ν-Ziffern lassen sich andere Gruppen von sechs Gleichungen bilden.

Wird die erste Gleichung der ersten Gruppe durch die erste Gleichung der zweiten Gruppe dividiert, so fällt F_1 heraus und es ergibt sich nach einigen Umformungen

$$E_1 (\mathfrak{d}_{11}^a \mathfrak{d}_2 - \mathfrak{d}_{21}^a \mathfrak{d}_1) + \mathfrak{E}_2 (\mathfrak{d}_{12}^a \mathfrak{d}_2 - \mathfrak{d}_{22}^a \mathfrak{d}_1) + \bar{\mathfrak{E}}_2 (\mathfrak{d}_{13}^a \mathfrak{d}_2 - \mathfrak{d}_{23}^a \mathfrak{d}_1) + \cdots \bar{\mathfrak{E}}_6 (\mathfrak{d}_{10}^a \mathfrak{d}_2 - \mathfrak{d}_{20}^a \mathfrak{d}_1) = 0 . \tag{101}$$

Werden auch die zweite, dritte bis sechste Gleichung der beiden Gruppen in derselben Weise zusammengefaßt und umgeformt, so erhält man

$$E_1 (\mathfrak{d}_{11}^b \mathfrak{d}_2 - \mathfrak{d}_{21}^b \mathfrak{d}_1) + \mathfrak{E}_2 (\mathfrak{d}_{12}^b \mathfrak{d}_2 - \mathfrak{d}_{22}^b \mathfrak{d}_1) + \cdots \bar{\mathfrak{E}}_6 (\mathfrak{d}_{10}^b \mathfrak{d}_2 - \mathfrak{d}_{20}^b \mathfrak{d}_1) = 0 \tag{102}$$

$$E_1 (\mathfrak{d}_{11}^c \mathfrak{d}_2 - \mathfrak{d}_{21}^c \mathfrak{d}_1) + \cdots \tag{103}$$

usw.

Nimmt man eine dritte Gruppe dazu, so können weitere Gleichungen von folgender Form gebildet werden:

$$E_1 (\mathfrak{d}_{11}^a \mathfrak{d}_3 - \mathfrak{d}_{31}^a \mathfrak{d}_1) + \mathfrak{E}_2 (\mathfrak{d}_{12}^a \mathfrak{d}_3 - \mathfrak{d}_{32}^a \mathfrak{d}_1) + \cdots \bar{\mathfrak{E}}_6 (\mathfrak{d}_{10}^a \mathfrak{d}_3 - \mathfrak{d}_{30}^a \mathfrak{d}_1) \tag{104}$$

$$E_1 (\mathfrak{d}_{11}^b \mathfrak{d}_3 - \mathfrak{d}_{31}^b \mathfrak{d}_1) + \cdots \tag{105}$$

usw.

Auf diese Weise können also leicht neun Gleichungen gebildet werden von folgender Form:

$$E_1 \Delta_{11} + \mathfrak{E}_2 \Delta_{12} + \bar{\mathfrak{E}}_2 \Delta_{13} + \cdots \bar{\mathfrak{E}}_6 \Delta_{10} = 0 , \tag{106}$$

$$E_1 \Delta_{21} + \mathfrak{E}_2 \Delta_{22} + \bar{\mathfrak{E}}_2 \Delta_{23} + \cdots \bar{\mathfrak{E}}_6 \Delta_{20} = 0 , \tag{107}$$

$$\vdots \qquad (108) \text{ bis } (113)$$

$$E_1 \Delta_{91} + \mathfrak{E}_2 \Delta_{92} + \bar{\mathfrak{E}}_2 \Delta_{93} + \cdots \bar{\mathfrak{E}}_6 \Delta_{90} = 0 , \tag{114}$$

Werden die Glieder einer Spalte, z. B. der ersten, auf die rechte Seite gebracht, und die neun Gleichungen zusammgengefaßt, so erhält man

$$\mathfrak{E}_2 \mathfrak{D} = - E_1 \mathfrak{D}_1 \text{ oder } \mathfrak{E}_2 = - E_1 \frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{D}} \qquad \bar{\mathfrak{E}}_2 = - E_1 \frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{D}} , \tag{115}$$

$$E_3 = - E_1 \frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{D}} \tag{116}$$

$$\mathfrak{E}_4 = - E_1 \frac{\mathfrak{D}_4}{\mathfrak{D}} \qquad \bar{\mathfrak{E}}_4 = - E_1 \frac{\mathfrak{D}_5}{\mathfrak{D}} , \tag{117}$$

$$\mathfrak{E}_5 = - E_1 \frac{\mathfrak{D}_6}{\mathfrak{D}} \qquad \bar{\mathfrak{E}}_5 = - E_1 \frac{\mathfrak{D}_7}{\mathfrak{D}} , \tag{118}$$

$$\mathfrak{E}_6 = - E_1 \frac{\mathfrak{D}_8}{\mathfrak{D}} \qquad \bar{\mathfrak{E}}_6 = - E_1 \frac{\mathfrak{D}_9}{\mathfrak{D}} . \tag{119}$$

Wie man zeigen kann, sind die Größen $\mathfrak{D}_2/\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_5/\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_7/\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_9/\mathfrak{D}$ jeweils konjugiert-komplex zu $\mathfrak{D}_1/\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_4/\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_6/\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_8/\mathfrak{D}$. Es werden deshalb folgende abgekürzte Bezeichnungen eingeführt:

$$\frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{D}} = q_1, \quad \frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{D}} = \bar{q}_1, \quad \frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{D}} = q_2, \quad \frac{\mathfrak{D}_4}{\mathfrak{D}} = q_3, \quad \frac{\mathfrak{D}_5}{\mathfrak{D}} = \bar{q}_3 \text{ usw.} \tag{120}$$

Die Gleichungen (115) bis (119) nehmen damit die Form an

$$\mathfrak{E}_2 = -E_1 \mathfrak{q}_1 , \qquad \overline{\mathfrak{E}}_2 = -E_1 \overline{\mathfrak{q}}_1 , \tag{121}$$

$$E_3 = -E_1 \mathfrak{q}_2 , \tag{122}$$

$$\mathfrak{E}_4 = -E_1 \mathfrak{q}_3 , \qquad \overline{\mathfrak{E}}_4 = -E_1 \overline{\mathfrak{q}}_3 , \tag{123}$$

$$\mathfrak{E}_5 = -E_1 \mathfrak{q}_4 , \qquad \overline{\mathfrak{E}}_5 = -E_1 \overline{\mathfrak{q}}_4 , \tag{124}$$

$$\mathfrak{E}_6 = -E_1 \mathfrak{q}_5 , \qquad \overline{\mathfrak{E}}_6 = -E_1 \overline{\mathfrak{q}}_5 . \tag{125}$$

Werden die Werte für $\overline{\mathfrak{E}}_2$, $\overline{\mathfrak{E}}_4$ und $\overline{\mathfrak{E}}_6$ nach (83), (85) und (87) in (121), (123) und (125) eingesetzt, so erhält man

$$(\mathfrak{c} - d)\,[(\overline{\mathfrak{c}} - d)(\mathfrak{r}_a + \mathfrak{r}_b) + (\mathfrak{r}_b\,\overline{\mathfrak{c}} - \mathfrak{r}_a\,d)] = \overline{\mathfrak{q}}_1 (\mathfrak{c} - d)(\overline{\mathfrak{c}} - d) , \tag{126}$$

$$-(\mathfrak{c} - \mathfrak{d})\,[(\overline{\mathfrak{c}} - d)\,\mathfrak{r}_a\,\mathfrak{r}_b + (\mathfrak{r}_a + \mathfrak{r}_b)(\mathfrak{r}_b\,\overline{\mathfrak{c}} - \mathfrak{r}_a\,d) = \overline{\mathfrak{q}}_3 (\mathfrak{c} - d)(\overline{\mathfrak{c}} - d) , \tag{127}$$

$$(\mathfrak{c} - d)\,\mathfrak{r}_a\,\mathfrak{r}_b\,(\mathfrak{r}_b\,\overline{\mathfrak{c}} - \mathfrak{r}_a\,d) = \overline{\mathfrak{q}}_5 (\mathfrak{c} - d)(\overline{\mathfrak{c}} - d) . \tag{128}$$

Wird aus diesen drei Gleichungen durch Zusammenfassen der Ausdruck $\mathfrak{r}_b\,\overline{\mathfrak{c}} - \mathfrak{r}_a\,d$ eliminiert und durch Abkürzug $\mathfrak{r}_a + \mathfrak{r}_b = \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{r}_a\,\mathfrak{r}_b = \mathfrak{P}$ gesetzt, so erhält man

$$\frac{\mathfrak{r}_b\,\overline{\mathfrak{c}} - \mathfrak{r}_a\,d}{\overline{\mathfrak{c}} - d} = \overline{\mathfrak{q}}_1 - \mathfrak{S} = -\frac{\overline{\mathfrak{q}}_3 + \mathfrak{P}}{\mathfrak{S}} = \frac{\overline{\mathfrak{q}}_5}{\mathfrak{P}} . \tag{129}$$

Durch Umformung ergibt sich

$$\mathfrak{P} = \frac{\overline{\mathfrak{q}}_5}{\overline{\mathfrak{q}}_1 - \mathfrak{S}} = \mathfrak{S}(\mathfrak{S} - \overline{\mathfrak{q}}_1) - \overline{\mathfrak{q}}_3 , \tag{130}$$

$$\mathfrak{S}^3 - 2\,\overline{\mathfrak{q}}_1\,\mathfrak{S}^2 + (\overline{\mathfrak{q}}_1^2 - \overline{\mathfrak{q}}_3)\,\mathfrak{S} + (\overline{\mathfrak{q}}_1\,\overline{\mathfrak{q}}_3 + \overline{\mathfrak{q}}_5) = 0 . \tag{131}$$

Die kubische Gleichung ergibt drei Lösungen und damit drei Gelenkvierecke, die die gestellten Bedingungen erfüllen, wie es nach *Roberts* auch sein muß.

Ist aus (131) und (130) die Summe und das Produkt der beiden Vektoren $\mathfrak{r}_a$ und $\mathfrak{r}_b$ berechnet, so kann auch jeder Vektor einzeln bestimmt werden.

Aus (129) ergibt sich die Beziehung

$$\frac{\overline{\mathfrak{c}}}{d} = \frac{\mathfrak{r}_a^2\,\mathfrak{r}_b - \overline{\mathfrak{q}}_5}{\mathfrak{r}_a\,\mathfrak{r}_b^2 - \overline{\mathfrak{q}}_5} . \tag{132}$$

Sind aus (130), (131) und (132) die Größen $\mathfrak{r}_a$, $\mathfrak{r}_b$ und $\overline{\mathfrak{c}}/d$ berechnet, so sind auch die konjugiert-komplexen Größen $\overline{\mathfrak{r}}_a$, $\overline{\mathfrak{r}}_b$ und $\mathfrak{c}/d$ bestimmt. Sie lassen sich auch aus (121), (123) und (125) nach demselben Entwicklungsgang ermitteln.

Zur Bestimmung der Größen u, v und $\mathfrak{c}$ bzw. $\overline{\mathfrak{c}}$ werden die übrigen noch nicht benutzen von den neun Gleichungen (122) und (124) herangezogen. Sie können wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{c}^2\left(1 - \frac{\overline{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{\mathfrak{c}}}{d} - 1\right)\left(\frac{\mathfrak{c}}{d}\,v^2 - u^2\right) + \left(\frac{\mathfrak{c}}{d} - 1\right)\left(\frac{\overline{\mathfrak{c}}}{d}\,v^2 - u^2\right) + \left(\mathfrak{r}_a\,\frac{\overline{\mathfrak{c}}}{d} - \mathfrak{r}_b\right)\left(\overline{\mathfrak{r}}_a\,\frac{\mathfrak{c}}{d} - \overline{\mathfrak{r}}_b\right) \\
&\quad + \left(\frac{\overline{\mathfrak{c}}}{d} - 1\right)\left[(\mathfrak{r}_a + \mathfrak{r}_b)\left(\overline{\mathfrak{r}}_b\,\frac{\mathfrak{c}}{d} - \overline{\mathfrak{r}}_a\right) + \left(\mathfrak{r}_a\,\overline{\mathfrak{r}}_b\,\frac{\mathfrak{c}}{d} - \overline{\mathfrak{r}}_a\,\mathfrak{r}_b\right)\right] \\
&\quad + \left(\frac{\mathfrak{c}}{d} - 1\right)\left[(\overline{\mathfrak{r}}_a + \overline{\mathfrak{r}}_b)\left(\mathfrak{r}_b\,\frac{\overline{\mathfrak{c}}}{d} - \overline{\mathfrak{r}}_a\right) + \left(\overline{\mathfrak{r}}_a\,\mathfrak{r}_b\,\frac{\overline{\mathfrak{c}}}{d} - \mathfrak{r}_a\,\overline{\mathfrak{r}}_b\right)\right] = -\mathfrak{q}_2\left(\frac{\mathfrak{c}}{d} - 1\right)\left(\frac{\overline{\mathfrak{c}}}{d} - 1\right),
\end{aligned} \tag{133}$$

$$\begin{aligned}
&2\,\mathfrak{c}^2\left(1 - \frac{\overline{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}}\right)\left(\overline{\mathfrak{r}}_b - \overline{\mathfrak{r}}_a\,\frac{\overline{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}}\right) + \left(\frac{\overline{\mathfrak{c}}}{d}\,v^2 - u^2\right)\left[\left(\frac{\overline{\mathfrak{c}}}{d} - 1\right)(\overline{\mathfrak{r}}_a + \overline{\mathfrak{r}}_b) + \left(\overline{\mathfrak{r}}_b\,\frac{\mathfrak{c}}{d} - \overline{\mathfrak{r}}_a\right)\right] \\
&\quad + \overline{\mathfrak{r}}_a\,\overline{\mathfrak{r}}_b\left(\frac{\mathfrak{c}}{d} - 1\right)\left(\mathfrak{r}_b\,\frac{\overline{\mathfrak{c}}}{d} - \mathfrak{r}_a\right) + \left(\overline{\mathfrak{r}}_b\,\frac{\mathfrak{c}}{d} - \overline{\mathfrak{r}}_a\right)\left(\overline{\mathfrak{r}}_a\,\mathfrak{r}_b\,\frac{\overline{\mathfrak{c}}}{d} - \mathfrak{r}_a\,\overline{\mathfrak{r}}_b\right) \\
&\quad + (\overline{\mathfrak{r}}_a + \overline{\mathfrak{r}}_b)\left(\frac{\overline{\mathfrak{c}}}{d} - 1\right)\left(\mathfrak{r}_a\,\overline{\mathfrak{r}}_b\,\frac{\mathfrak{c}}{d} - \overline{\mathfrak{r}}_a\,\mathfrak{r}_b\right) = \mathfrak{q}_4\left(\frac{\mathfrak{c}}{d} - 1\right)\left(\frac{\overline{\mathfrak{c}}}{d} - 1\right),
\end{aligned} \tag{134}$$

$$2\,\mathfrak{c}^2\left(\frac{\bar{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}}-1\right)\left(\bar{\mathfrak{r}}_b\frac{\bar{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}}-\mathfrak{r}_a\right)+\left(\frac{\mathfrak{c}}{d}v^2-u^2\right)\left[\left(\frac{\mathfrak{c}}{d}-1\right)(\mathfrak{r}_a+\mathfrak{r}_b)+\left(\mathfrak{r}_b\frac{\bar{\mathfrak{c}}}{d}-\bar{\mathfrak{r}}_a\right)\right]$$
$$+\mathfrak{r}_a\,\mathfrak{r}_b\left(\frac{\bar{\mathfrak{c}}}{d}-1\right)\left(\bar{\mathfrak{r}}_b\frac{\mathfrak{c}}{d}-\bar{\mathfrak{r}}_a\right)+\left(\mathfrak{r}_b\frac{\bar{\mathfrak{c}}}{d}-\mathfrak{r}_a\right)\left(\mathfrak{r}_a\,\bar{\mathfrak{r}}_b\frac{\mathfrak{c}}{d}-\bar{\mathfrak{r}}_a\,\mathfrak{r}_b\right)$$
$$+(\mathfrak{r}_a+\mathfrak{r}_b)\left(\frac{\mathfrak{c}}{d}-1\right)\left(\bar{\mathfrak{r}}_a\,\mathfrak{r}_b\frac{\bar{\mathfrak{c}}}{d}-\mathfrak{r}_a\,\bar{\mathfrak{r}}_b\right)=\bar{\mathfrak{q}}_4\left(\frac{\mathfrak{c}}{d}-1\right)\left(\frac{\bar{\mathfrak{c}}}{d}-1\right). \qquad (135)$$

Aus (133), (134) und (135) können die Ausdrücke $\mathfrak{c}^2$, $\frac{\mathfrak{c}}{d}v^2-u^2$ und $\frac{\bar{\mathfrak{c}}}{d}v^2-u^2$ bestimmt werden, mit denen dann auch u, v und $\mathfrak{c}$ bekannt sind.

Von der Durchrechnung eines Zahlenbeispieles mußte Abstand genommen werden. Wenn man sich den Gang der Rechnung vergegenwärtig, so erkennt man, daß die Rechnung zwar nicht schwierig ist, weil nach übersichtlichen Schemen gerechnet werden kann, aber doch erheblichen Zeitaufwand für den einzelnen Bearbeiter bedeuten würde, wenn keine besonderen Hilfsmittel zur Verfügung stehen. Die aus den gegebenen $\mathfrak{r}_\nu$-Größen zu berechnenden $\mathfrak{q}$-Größen sind Quotienten neunstelliger Determinanten, deren Glieder sich aus sechsstelligen Determinanten zusammensetzen. Die Rechnung kann also nur in einem erträglichen Zeitaufwand durchgeführt werden, wenn ein Stab von Bearbeitern zur Verfügung steht oder mechanische oder elektrische Hilfsmittel etwa in Form eines „Determinantenrechners" verwendet werden können. Dieser wie auch der nächste Absatz ist deshalb nur als Anfang dafür gedacht, in welcher Weise sich die algebraische Methode auch auf kompliziertere getriebliche Anordnungen mit Vorteil anwenden lassen, ohne den Anspruch auf erschöpfende Behandlung des Problems zu erheben. Er läßt ein weites Feld für weitere Untersuchungen und Forschungen offen.

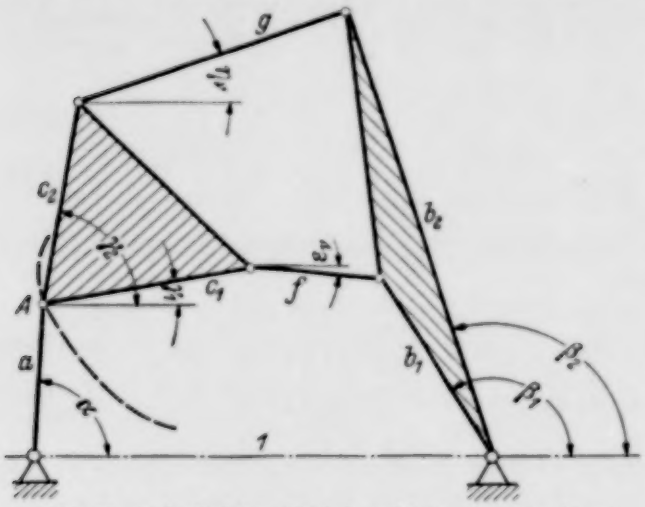

Abb. 22. Sechsgliedriges Kurbelgetriebe in der Anordnung eines Zweistandgetriebes.

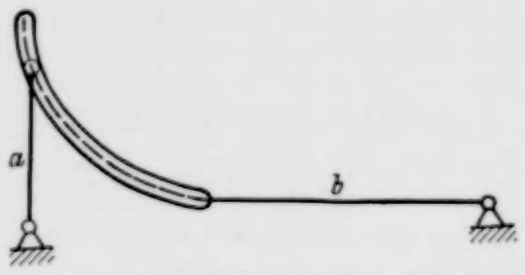

Abb. 23. Kurvengetriebe als Ersatzgetriebe für das sechsgliedrige Kurbelgetriebe in Abb. 22.

Hier soll nur auf eine getriebesynthetische Anwendung des in diesem Abschnitt behandelten Problems hingewiesen werden: Bei der Bewegung eines sechsgliedrigen Kurbelgetriebes in der Aufstellung eines Zweistandgetriebes (Abb. 22) beschreibt der Kurbelzapfen A des Gliedes a relativ zu dem anderen im Gestell drehbar geführten Glied b eine Kurve. Wird das Getriebe in kinematischer Umkehr auf das Glied b als Gestell aufgestellt gedacht, so ist die Kurve die Koppelkurve eines Gelenkviereckes, das außer b aus den Gliedern g, f und c gebildet wird. Beim Antrieb von Glied a wird Glied b im sechsgliedrigen Kurbelgetriebe ebenso bewegt wie in einem Kurvengetriebe nach Abb. 23, einem Ersatzgetriebe für das Kurbelgetriebe [1, 2], wenn die Kurve nach der Koppelkurve von A relativ zu b gestaltet wird.

Sollen nun acht Winkelstellungen φ_ν des Gliedes a acht Winkelstellungen ψ_ν des Gliedes b zugeordnet werden, so lassen sich bei freier Wahl der Gliedlänge a und seiner Anfangsstellung α aus den gegebenen Winkeln φ_ν und ψ_ν neun Punkte der Koppelkurve festlegen, die Punkt A relativ zu b beschreibt (Abb. 22). Mit Hilfe der in diesem Abschnitt entwickelten Beziehungen können dann die übrigen Abmessungen des sechsgliedrigen Kurbelgetriebes, die sich auf das Gelenkviereck b, f, c, g beziehen, ermittelt werden. Dabei werden die Längen auf die Gestelllänge als Einheit bezogen. Eine Funktion $\psi=f(\varphi)$ kann also mit einem sechsgliedrigen Kurbelgetriebe in neun Punkten verwirklicht werden.

5. Winkelzuordnungen am sechsgliedrigen Kurbelgetriebe. Mit der Zuordnung von acht Winkelpaaren ist am sechgliedrigen Kurbelgetriebe die höchstmögliche Zahl der Zuordnungen

[1] *K. Hain*, Feinmech. Präz. 49 (1941) S. 219.
[2] *G. Kiper*, Konstruktion 6 (1954) S. 300.

nicht erreicht, weil zwei Größen a und α noch frei gewählt worden sind. Wird diese Freiheit dazu ausgenutzt, weitere Winkellagen zu verwirklichen, so können zehn Winkelzuordnungen (vorgeschrieben werden, aus denen dann die Abmessungen des Kurbelgetriebes, die sich durch zehn Bestimmungsgrößen festlegen lassen, dargestellt werden können. Damit können von einer Funktion $\psi = f(\varphi)$ elf Punkte verwirklicht werden. Für die zehn das Kurbelgetriebe festlegenden Größen werden gewählt (Abb. 22): $a, \alpha, b_1, \beta_1, b_2, \beta_2, c_1, \gamma_1, c_2, \gamma_2$. Diese zehn Größen lassen sich als Vektoren durch folgende komplexen Größen darstellen: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$. Die Lösung dieses Problems wird hier am Zweistandgetriebe gezeigt, kann aber sinngemäß auch auf die anderen Formen der sechsgliedrigen Kurbelgetriebe angewendet werden.

Wie an Abb. 22 verfolgt werden kann, können mit den im Bild eingetragenen Bezeichnungen folgende beiden Vektorgleichungen aufgestellt werden:

$$\mathfrak{a}\, e^{i\varphi_\nu} + \mathfrak{c}_1\, e^{i\xi_\nu} + f\, e^{i\varepsilon_\nu} - \mathfrak{b}_1\, e^{i\psi_\nu} - 1 = 0\,, \tag{136}$$

$$\mathfrak{a}\, e^{i\varphi_\nu} + \mathfrak{c}_2\, e^{i\xi_\nu} + g\, e^{i\eta_\nu} - \mathfrak{b}_2\, e^{i\psi_\nu} - 1 = 0\,. \tag{137}$$

Die Gleichungen gelten für eine Stellung des Getriebes, in der sich Glied a um den Winkel φ_ν gegenüber der in Abb. 22 gezeichneten Stellung weitergedreht hat. Das Glied b hat sich dann um den Winkel ψ_ν und das Glied c um den Winkel ξ_ν gegenüber der gezeichneten Lage gedreht. Die Winkel ε_ν und η_ν für die Koppeln f und g werden gegen die Waagerechte gemessen.

Denkt man sich das Getriebe an der reellen Zahlenachse gespiegelt, so gelten entsprechende Gleichungen für die konjugiert-komplexen Größen

$$\bar{\mathfrak{a}}\, e^{-i\varphi_\nu} + \bar{\mathfrak{c}}_1\, e^{-i\xi_\nu} + f\, e^{-i\varepsilon_\nu} - \bar{\mathfrak{b}}_1\, e^{-i\psi_\nu} - 1 = 0\,, \tag{138}$$

$$\bar{\mathfrak{a}}\, e^{-i\varphi_\nu} + \bar{\mathfrak{c}}_2\, e^{-i\xi_\nu} + g\, e^{-i\eta_\nu} - \bar{\mathfrak{b}}_2\, e^{-i\psi_\nu} - 1 = 0\,. \tag{139}$$

Werden die Gleichungen (136) bis (139) nach den f- und g-Gliedern aufgelöst und dann (136) mit (138) und (137) mit (139) multipliziert, so ergibt sich

$$f^2 = (1 + \mathfrak{b}_1\, e^{i\psi_\nu} - \mathfrak{a}\, e^{i\varphi_\nu} - \mathfrak{c}_1\, e^{i\xi_\nu})\,(1 + \bar{\mathfrak{b}}_1\, e^{-i\psi_\nu} - \bar{\mathfrak{a}}\, e^{-i\varphi_\nu} - \bar{\mathfrak{c}}_1\, e^{-i\xi_\nu})\,, \tag{140}$$

$$g^2 = (1 + \mathfrak{b}_2\, e^{i\psi_\nu} - \mathfrak{a}\, e^{i\varphi_\nu} - \mathfrak{c}_2\, e^{i\xi_\nu})\,(1 + \bar{\mathfrak{b}}_2\, e^{-i\psi_\nu} - \bar{\mathfrak{a}}\, e^{-i\varphi_\nu} - \bar{\mathfrak{c}}_2\, e^{-i\xi_\nu})\,. \tag{141}$$

Diese beiden Gleichungen können durch Umformung zwecks Eliminierung der Größe ξ_ν auf folgende Form gebracht werden

$$\mathfrak{c}_1\, e^{i\xi_\nu}\, \overline{\mathfrak{A}}_1 + \bar{\mathfrak{c}}_1\, e^{-i\xi_\nu}\, \mathfrak{A}_1 = B_1\,, \tag{142}$$

$$\mathfrak{c}_2\, e^{i\xi}\, \overline{\mathfrak{A}}_2 + \bar{\mathfrak{c}}_2\, e^{-i\psi}\, \mathfrak{A}_2 = B_2\,. \tag{143}$$

Werden diese beiden Gleichungen so zusammengefaßt, daß ξ_ν herausfällt, so erhält man

$$(\mathfrak{c}_1\, \bar{\mathfrak{c}}_2\, \overline{\mathfrak{A}}_1\, \mathfrak{A}_2 - \bar{\mathfrak{c}}_1\, \mathfrak{c}_2\, \mathfrak{A}_1\, \overline{\mathfrak{A}}_2)^2 + (\mathfrak{c}_1\, \overline{\mathfrak{A}}_1\, B_2 - \mathfrak{c}_2\, \overline{\mathfrak{A}}_2\, B_1)\,(\bar{\mathfrak{c}}_1\, \mathfrak{A}_1\, B_2 - \bar{\mathfrak{c}}_2\, \mathfrak{A}_2\, B_1) = 0\,. \tag{144}$$

Hierin bedeutet

$$\mathfrak{A}_1 = 1 + \mathfrak{b}_1\, e^{i\psi_\nu} - \mathfrak{a}\, e^{i\varphi_\nu}\,, \tag{145}$$

$$\mathfrak{A}_2 = 1 + \mathfrak{b}_2\, e^{i\psi_\nu} - \mathfrak{a}\, e^{i\varphi_\nu}\,, \tag{146}$$

$$\overline{\mathfrak{A}}_1 = 1 + \bar{\mathfrak{b}}_1\, e^{-i\psi_\nu} - \bar{\mathfrak{a}}\, e^{-i\varphi_\nu}\,, \tag{147}$$

$$\overline{\mathfrak{A}}_2 = 1 + \bar{\mathfrak{b}}_2\, e^{-i\psi_\nu} - \bar{\mathfrak{a}}\, e^{-i\varphi_\nu}\,, \tag{148}$$

$$B_1 = u_1 + \mathfrak{A}_1 + \overline{\mathfrak{A}}_1 - C_1\,, \tag{149}$$

$$B_2 = u_2 + \mathfrak{A}_2 + \overline{\mathfrak{A}}_2 - C_2\,, \tag{150}$$

$$u_1 = b_1^2 + a^2 + c_1^2 - f^2 - 1\,, \tag{151}$$

$$u_2 = b_2^2 + a^2 + c_2^2 - g^2 - 1\,, \tag{152}$$

$$C_1 = \mathfrak{a}\, \bar{\mathfrak{b}}_1\, e^{i(\varphi_\nu - \psi_\nu)} + \bar{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{b}_1\, e^{-i(\varphi_\nu - \psi_\nu)}\,, \tag{153}$$

$$C_2 = \mathfrak{a}\, \bar{\mathfrak{b}}_2\, e^{i(\varphi_\nu - \psi_\nu)} + \bar{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{b}_2\, e^{-i(\varphi_\nu - \psi_\nu)}\,. \tag{154}$$

Setzt man für die Anfangslage φ_ν, ψ_ν und ξ_ν gleich Null, so erhält man aus (140) und (141) für f und g die weiteren Beziehungen

$$f^2 = (1 + \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{a} - \mathfrak{c}_1)\,(1 + \bar{\mathfrak{b}}_1 - \bar{\mathfrak{a}} - \bar{\mathfrak{c}}_1)\,, \tag{155}$$

$$g^2 = (1 + \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a} - \mathfrak{c}_2)\,(1 + \bar{\mathfrak{b}}_2 - \bar{\mathfrak{a}} - \bar{\mathfrak{c}}_2)\,. \tag{156}$$

Werden die Klammern in (144) durch Ausmultiplizieren unter Berücksichtiung von (145) bis (154) aufgelöst, so erhält man nach dem Ordnen der Glieder eine Gleichung folgender Form:

$$\left.\begin{array}{llll}
+\mathfrak{E}_1 e^{i3(\varphi_\nu-\psi_\nu)} & +\overline{\mathfrak{E}}_1 e^{-i3(\varphi_\nu-\psi_\nu)} & +\mathfrak{E}_2 e^{i(2\varphi_\nu+\psi_\nu)} & +\overline{\mathfrak{E}}_2 e^{-i(2\varphi_\nu+\psi_\nu)} \\
+\mathfrak{E}_3 e^{i(\varphi_\nu+2\psi_\nu)} & +\overline{\mathfrak{E}}_3 e^{-i(\varphi_\nu+2\psi_\nu)} & +\mathfrak{E}_4 e^{i3\psi_\nu} & +\overline{\mathfrak{E}}_4 e^{-i3\psi_\nu} \\
+\mathfrak{E}_5 e^{i2(\varphi_\nu-\psi_\nu)} & +\overline{\mathfrak{E}}_5 e^{-i2(\varphi_\nu-\psi_\nu)} & +\mathfrak{E}_6 e^{i3\varphi_\nu} & -\overline{\mathfrak{F}}_1 e^{-i3\varphi_\nu} \\
-\mathfrak{F}_2 e^{i(3\varphi_\nu-2\psi_\nu)} & -\overline{\mathfrak{F}}_2 e^{-i(3\varphi_\nu-2\psi_\nu)} & -\mathfrak{F}_3 e^{i(2\varphi_\nu-3\psi_\nu)} & -\overline{\mathfrak{F}}_3 e^{-i(2\varphi_\nu-3\psi_\nu)} \\
-\mathfrak{F}_4 e^{i(3\varphi_\nu-\psi_\nu)} & -\overline{\mathfrak{F}}_4 e^{-i(3\varphi_\nu-\psi_\nu)} & -\mathfrak{F}_5 e^{i(\varphi_\nu-3\psi_\nu)} & -\overline{\mathfrak{F}}_5 e^{-i(\varphi_\nu-3\psi_\nu)} \\
-\mathfrak{G}_1 e^{i(2\varphi_\nu-\psi_\nu)} & -\overline{\mathfrak{G}}_1 e^{-i(2\varphi_\nu-\psi_\nu)} & -\mathfrak{G}_2 e^{i(\varphi_\nu-2\psi_\nu)} & -\overline{\mathfrak{G}}_2 e^{-i(\varphi_\nu-2\psi_\nu)} \\
-\mathfrak{G}_3 e^{i(\varphi_\nu+\psi_\nu)} & -\overline{\mathfrak{G}}_3 e^{-i(\varphi_\nu+\psi_\nu)} & -\mathfrak{G}_4 e^{i(\varphi_\nu-\psi_\nu)} & -\overline{\mathfrak{G}}_4 e^{-i(\varphi_\nu-\psi_\nu)} \\
-\mathfrak{H}_1 e^{i2\varphi_\nu} & -\overline{\mathfrak{H}}_1 e^{-i2\varphi_\nu} & -\mathfrak{H}_2 e^{i2\psi_\nu} & -\overline{\mathfrak{H}}_2 e^{-i2\psi_\nu} \\
-\mathfrak{H}_3 e^{i\varphi_\nu} & -\overline{\mathfrak{H}}_3 e^{-i\varphi_\nu} & -\mathfrak{H}_4 e^{i\psi_\nu} & -\overline{\mathfrak{H}}_4 e^{-i\psi_\nu}
\end{array}\right\} -G_5 = 0\,. \tag{157}$$

Die $\mathfrak{E}$-, $\mathfrak{F}$-, $\mathfrak{G}$- und $\mathfrak{H}$-Größen sind Funktionen der unbekannten fünf Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$. Sie enthalten außerdem die Koppellängen f und g, in den Größen u_1 und u_2, die aber nach (151) und (152) aus den fünf Vektoren darstellbar sind. Für die $\mathfrak{E}$-Größen, die für die weitere Entwicklung besonders intressieren, gelten folgende Beziehungen:

$$\mathfrak{E}_1 = -\mathfrak{a}^3\,\overline{\mathfrak{b}}_1\,\overline{\mathfrak{b}}_2\,(\mathfrak{c}_1-\mathfrak{c}_2)\,(\overline{\mathfrak{c}}_1\,\overline{\mathfrak{b}}_2-\overline{\mathfrak{c}}_2\,\overline{\mathfrak{b}}_1)\,, \tag{158}$$

$$\mathfrak{E}_2 = +\mathfrak{a}^2\,(\overline{\mathfrak{c}}_1-\overline{\mathfrak{c}}_2)\,[(\mathfrak{c}_1-\mathfrak{c}_2)\,(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2)+(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{b}_2-\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{b}_1)]\,, \tag{159}$$

$$\mathfrak{E}_3 = -\mathfrak{a}\,(\overline{\mathfrak{c}}_1-\overline{\mathfrak{c}}_2)\,[(\mathfrak{c}_1-\mathfrak{c}_2)\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2+(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2)\,(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{b}_2-\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{b}_1)]\,, \tag{160}$$

$$\mathfrak{E}_4 = +\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,(\overline{\mathfrak{c}}_1-\overline{\mathfrak{c}}_2)\,(\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{b}_2-\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{b}_1)\,, \tag{161}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_5 = {} & +\mathfrak{a}^2\,[(\mathfrak{c}_1\,\overline{\mathfrak{c}}_2\,\mathfrak{b}_1-\overline{\mathfrak{c}}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{b}_2)^2+2\,(\mathfrak{c}_1\,\overline{\mathfrak{b}}_1-\mathfrak{c}_2\,\overline{\mathfrak{b}}_2)\,(\overline{\mathfrak{c}}_1\,\overline{\mathfrak{b}}_2-\overline{\mathfrak{c}}_2\,\overline{\mathfrak{b}}_1)+4\,\overline{\mathfrak{b}}_1\,\overline{\mathfrak{b}}_2\,(\mathfrak{c}_1-\mathfrak{c}_2)\,(\overline{\mathfrak{c}}_2-\overline{\mathfrak{c}}_1) \\
& +(1+\mathfrak{a}^2)\,(\mathfrak{c}_1\,\overline{\mathfrak{b}}_2-\mathfrak{c}_2\,\overline{\mathfrak{b}}_1)\,(\overline{\mathfrak{c}}_1\,\overline{\mathfrak{b}}_2-\overline{\mathfrak{c}}_2\,\overline{\mathfrak{b}}_1)+\overline{\mathfrak{b}}_1\,\overline{\mathfrak{b}}_2\,(\mathfrak{c}_1-\mathfrak{c}_2)\,(\overline{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{b}_1\,\overline{\mathfrak{b}}_2-\overline{\mathfrak{c}}_2\,\overline{\mathfrak{b}}_1\,\mathfrak{b}_2) \\
& +2\,(\overline{\mathfrak{b}}_1+\overline{\mathfrak{b}}_2)\,(\mathfrak{c}_1-\mathfrak{c}_2)\,(\overline{\mathfrak{c}}_1\,\overline{\mathfrak{b}}_2-\overline{\mathfrak{c}}_2\,\overline{\mathfrak{b}}_1)+\overline{\mathfrak{b}}_1\,\overline{\mathfrak{b}}_2\,(\mathfrak{c}_1-\mathfrak{c}_2)\,(\overline{\mathfrak{c}}_1\,u_2-\overline{\mathfrak{c}}_2\,u_1) \\
& +(\overline{\mathfrak{c}}_1\,\overline{\mathfrak{b}}_2-\overline{\mathfrak{c}}_2\,\overline{\mathfrak{b}}_1)\,(\mathfrak{c}_1\,\overline{\mathfrak{b}}_1\,u_2-\mathfrak{c}_2\,\overline{\mathfrak{b}}_2\,u_1)\end{aligned} \tag{162}$$

$$\mathfrak{E}_6 = -\mathfrak{a}^3\,(\mathfrak{c}_1-\mathfrak{c}_2)\,(\overline{\mathfrak{c}}_1-\overline{\mathfrak{c}}_2)\,. \tag{163}$$

Setzt man in (157) $\nu = 1$ bis 10 ein, so erhält man zehn homologe Gleichungen. Durch wiederholte Anwendung der im vorigen Abschnitt benutzten Methode [siehe (88) bis (105)] können die $\mathfrak{H}$-, $\mathfrak{G}$- und $\mathfrak{F}$-Größen eliminiert werden, so daß sich zehn Gleichungen von folgender Form ergeben

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{E}_1\,\Delta_{11}+\overline{\mathfrak{E}}_1\,\Delta_{12}+\mathfrak{E}_2\,\Delta_{13}+\overline{\mathfrak{E}}_2\,\Delta_{14}+\mathfrak{E}_3\,\Delta_{15}+\overline{\mathfrak{E}}_3\,\Delta_{16}+\mathfrak{E}_4\,\Delta_{17} \\
\qquad\qquad +\overline{\mathfrak{E}}_4\,\Delta_{18}+\mathfrak{E}_5\,\Delta_{19}+\overline{\mathfrak{E}}_5\,\Delta_{10}=-\mathfrak{E}_6\,\Delta_1, \\
\mathfrak{E}_1\,\Delta_{21}+\overline{\mathfrak{E}}_1\,\Delta_{22}+\mathfrak{E}_2\,\Delta_{23}+\overline{\mathfrak{E}}_2\,\Delta_{24}+\cdots \\
\mathfrak{E}_1\,\Delta_{31}+\overline{\mathfrak{E}}_1\,\Delta_{32}+\cdots \\
\vdots \\
\mathfrak{E}_1\,\Delta_{01}+\overline{\mathfrak{E}}_1\,\Delta_{02}+\cdots
\end{array}\right\} \text{(164) bis (173)}$$

Werden diese zehn Gleichungen zusammengefaßt, so erhält man

$$\mathfrak{E}_1 = -\mathfrak{E}_6\,\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{D}} = -\mathfrak{E}_6\cdot\mathfrak{q}_1\,, \tag{174}$$

$$\overline{\mathfrak{E}}_1 = -\mathfrak{E}_6\,\mathfrak{q}_1'\,, \tag{175}$$

$$\mathfrak{E}_2 = -\mathfrak{E}_6\,\mathfrak{q}_2\,, \tag{176}$$

$$\overline{\mathfrak{E}}_2 = -\mathfrak{E}_6\,\mathfrak{q}_2'\,, \tag{177}$$

$$\mathfrak{E}_3 = -\mathfrak{E}_6\,\mathfrak{q}_3\,, \tag{178}$$

$$\overline{\mathfrak{E}}_3 = -\mathfrak{E}_6\,\mathfrak{q}_3'\,, \tag{179}$$

$$\mathfrak{E}_4 = -\mathfrak{E}_6\,\mathfrak{q}_4\,, \tag{180}$$

$$\overline{\mathfrak{E}}_4 = -\mathfrak{E}_6\,\mathfrak{q}_4'\,, \tag{181}$$

$$\mathfrak{E}_5 = -\mathfrak{E}_6\,\mathfrak{q}_5\,, \tag{182}$$

$$\overline{\mathfrak{E}}_5 = -\mathfrak{E}_6\,\mathfrak{q}_5'\,. \tag{183}$$

Setzt man die Werte von (158) bis (161) und (163) in (175), (176), (178) und (180) ein, so ergibt sich

$$-\bar{a}^3 b_1 b_2 (\bar{c}_1 - \bar{c}_2)(c_1 b_2 - c_2 b_1) = a^3 (c_1 - c_2)(\bar{c}_1 - \bar{c}_2) \cdot q_1', \quad (184)$$

$$+ a^2 (\bar{c}_1 - \bar{c}_2)[(c_1 - c_2)(b_1 + b_2) + (c_1 b_2 - c_2 b_1)] = a^3 (c_1 - c_2)(\bar{c}_1 - \bar{c}_2) q_2, \quad (185)$$

$$-a (\bar{c}_1 - \bar{c}_2)[(c_1 - c_2) b_1 b_2 + (b_1 + b_2)(c_1 b_2 - c_2 b_1)] = a^3 (c_1 - c_2)(\bar{c}_1 - \bar{c}_2) q_3, \quad (186)$$

$$+ b_1 b_2 (\bar{c}_1 - \bar{c}_2)(c_1 b_2 - c_2 b_1) = a^3 (c_1 - c_2)(\bar{c}_1 - \bar{c}_2) q_4. \quad (187)$$

Die Zusammenfassung von (184) und (187) führt zu der Beziehung

$$\bar{a}^3 = -\frac{q_1'}{q_4}. \quad (188)$$

Werden (185), (186) und (187) zusammengefaßt, so ergibt sich

$$\frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{c_1 - c_2} = a\, q_2 - (b_1 + b_2) - = \frac{a^2 q_3 + b_1 b_2}{b_1 + b_2} = \frac{a^3 q_4}{b_1 b_2}. \quad (189)$$

Setzt man zur Abkürzung $b_1 + b_2 = \mathfrak{S}$ und $b_1 b_2 = \mathfrak{P}$, so lassen sich die Beziehungen in folgender Form schreiben

$$\mathfrak{P} = \frac{a^3 q_4}{a q_2 - \mathfrak{S}}, \quad (190)$$

$$\mathfrak{S}^3 - 2\,\mathfrak{S}^2 a\, q_2 + \mathfrak{S}\, a^2 (q_2^2 - q_3) + a^3 (q_2 q_3 + q_4) = 0, \quad (191$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{l_1^2 b_2 - a^3 a_4}{b_1 l_2^2 - a^3 q_4}. \quad (192)$$

Gleichung (182) kann unter Berücksichtigung von (162) wie folgt umgeformt werden

$$c_1 \bar{c}_2 \left(b_1 - \frac{c_2}{c_1}\frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} b_2\right)^2 + 2\left(b_1 - \frac{c_2}{c_1}\bar{b}_2\right)\left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2}\bar{b}_2 - \bar{b}_1\right) + 4\,\bar{b}_1 \bar{b}_2 \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)\left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} - 1\right)$$
$$+ (1 + a^2)\left(\bar{b}_2 - \frac{c_2}{c_1}\bar{b}_1\right)\left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2}\bar{b}_2 - \bar{b}_1\right) + \bar{b}_1 \bar{b}_2 \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)\left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} b_1 \bar{b}_2 - \bar{b}_1 b_2\right)$$
$$+ 2(\bar{b}_1 + \bar{b}_2)\left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)\left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2}\bar{b}_2 - \bar{b}_1\right) + \bar{b}_1 \bar{b}_2 \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)\left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} u_2 - u_1\right) + \left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2}\bar{b}_2 - \bar{b}_1\right)\left(b_1 u_2 - \frac{c_2}{c_1} b_2 u_1\right)$$
$$= a\left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)\left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} - 1\right) \cdot q_5. \quad (193)$$

Eine entsprechende Umformung kann mit (183) unter Berücksichtigung von (162) vorgenommen werden:

$$c_1 \bar{c}_2 \left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2}\frac{c_2}{c_1}\bar{b}_1 - \bar{b}_2\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} b_1 - b_2\right)\left(b_2 - \frac{c_2}{c_1} b_1\right) + 4\, b_1 b_2 \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)\left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} - 1\right)$$
$$+ (1 + a^2)\left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} b_2 - b_1\right)\left(\bar{b}_2 - \frac{c_2}{c_1} b_1\right) + b_1 b_2 \left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} - 1\right)\left(\bar{b}_1 b_2 - \frac{c_2}{c_1} b_1 \bar{b}_2\right)$$
$$+ 2(b_1 + b_2)\left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} - 1\right)\left(b_2 - \frac{c_2}{c_1} b_1\right) + b_1 b_2 \left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} - 1\right)\left(u_2 - \frac{c_2}{c_1} u_1\right) + \left(b_2 - \frac{c_2}{c_1} b_1\right)\left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} b_1 u_2 - b_2 u_1\right)$$
$$= \frac{a^3}{\bar{a}^2}\left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)\left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} - 1\right) q_5'. \quad (194)$$

Aus (151) und (152) erhält man unter Berücksichtigung von (155) und (156) für u_1 und u_2 die Ausdrücke

$$u_1 = c_1 (1 + \bar{b}_1 - \bar{a}) + \bar{c}_2 \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} (1 + b_1 - a) - (1 + b_1 - a) - (1 + \bar{b}_1 - \bar{a}) + a\,\bar{b}_1 + \bar{a}\, b_1, \quad (195)$$

$$= c_1 \frac{c_2}{c_1}(1 + \bar{b}_2 - \bar{a}) + \bar{c}_2 (1 + b_2 - a) - (1 + b_2 - a) - (1 + \bar{b}_2 - \bar{a}) + a\,\bar{b}_2 + \bar{a}\, b_2. \quad (196)$$

Werden diese Ausdrücke in (193) und (194) eingesetzt, so können diese auf folgende Form gebracht werden:

$$\mathfrak{c}_1 \mathfrak{f}_1 + \bar{\mathfrak{c}}_2 \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{c}_1 \bar{\mathfrak{c}}_2 \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{w}_1 , \tag{197}$$

$$\mathfrak{c}_1 \mathfrak{f}_2 + \bar{\mathfrak{c}}_2 \mathfrak{t}_2 = \mathfrak{c}_1 \bar{\mathfrak{c}}_2 \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{w}_2 . \tag{198}$$

Durch Zusammenfassen dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$\mathfrak{c}_1 (\mathfrak{f}_1 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{f}_2 \mathfrak{t}_1) = \mathfrak{c}_1 \bar{\mathfrak{c}}_2 (\mathfrak{v}_1 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{v}_2 \mathfrak{t}_1) + (\mathfrak{w}_1 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{w}_2 \mathfrak{t}_1) , \tag{199}$$

$$\bar{\mathfrak{c}}_2 (\mathfrak{f}_1 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{f}_2 \mathfrak{t}_1) = \mathfrak{c}_1 \bar{\mathfrak{c}}_2 (\mathfrak{f}_1 \mathfrak{v}_2 - \mathfrak{f}_2 \mathfrak{v}_1) + (\mathfrak{f}_1 \mathfrak{w}_2 - \mathfrak{f}_2 \mathfrak{w}_1) . \tag{200}$$

Durch Multiplikation der beiden Gleichungen (198) und (199) miteinander erhält man

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{c}_1 \bar{\mathfrak{c}}_2)^2 (\mathfrak{v}_1 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{v}_2 \mathfrak{t}_1)(\mathfrak{f}_1 \mathfrak{v}_2 - \mathfrak{f}_2 \mathfrak{v}_1) \\ &+ \mathfrak{c}_1 \bar{\mathfrak{c}}_2 [(\mathfrak{v}_1 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{v}_2 \mathfrak{t}_1)(\mathfrak{f}_1 \mathfrak{w}_2 - \mathfrak{f}_2 \mathfrak{w}_1) + (\mathfrak{w}_1 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{w}_2 \mathfrak{t}_1)(\mathfrak{f}_1 \mathfrak{v}_2 - \mathfrak{f}_2 \mathfrak{v}_1) - (\mathfrak{f}_1 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{f}_2 \mathfrak{t}_1)^2] \\ &+ (\mathfrak{w}_1 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{w}_2 \mathfrak{t}_1)(\mathfrak{f}_1 \mathfrak{w}_2 - \mathfrak{f}_2 \mathfrak{w}_1) = 0 . \end{aligned} \tag{201}$$

Aus dieser Gleichung kann $\mathfrak{c}_1 \bar{\mathfrak{c}}_2$ und mit Hilfe von (199) und (200) dann $\mathfrak{c}_1$ und $\bar{\mathfrak{c}}_2$ ermittelt werden.

Der Rechnungsgang ist demnach folgendermaßen: Die Größen $\mathfrak{q}_1$ bis $\mathfrak{q}_4$ und $\mathfrak{q}_1'$ bis $\mathfrak{q}_4'$ werden aus den gegebenen Winkelzuordnungen berechnet. Aus (188) erhält man $\bar{\mathfrak{a}}$ und damit auch $\mathfrak{a}$ und zwar im allgemeinen drei Werte. Aus der kubischen Gleichung (191) können mit jedem Wert von $\mathfrak{a}$ im allgemeinen drei Werte für $\mathfrak{S} = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2$ bestimmt werden. Aus (190) ergibt sich dann $\mathfrak{P} = \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2$. Aus $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{P}$ kann $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ ermittelt werden, für die sich höchstens neun Werte ergeben. Der Wert $\mathfrak{c}_1/\mathfrak{c}_2$ wird aus (192) bestimmt und damit ist auch $\bar{\mathfrak{c}}_1/\bar{\mathfrak{c}}_2$ bekannt. Aus (193) bis (201) werden $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ errechnet, womit alle fünf Vektorgrößen bestimmt sind, die das sechsgliedrige Kurbelgetriebe in seinen Abmessungen und in seiner Ausgangslage festlegen.

6. Schlußbemerkung. Wie die Entwicklungen zeigen, können mit Hilfe der Vektordarstellung in der *Gauß*schen Zahlenebene einfache Formeln für Winkelzuordnungen und Beziehungen ihrer Ableitungen aufgestellt werden, die zur Berechnung von Abmessungen an Kurbelgetrieben mit beliebiger Genauigkeit dienen können und dabei das Zugrundelegen von Bedingungen zulassen, die bisher mit anderen Methoden nicht erfüllt werden konnten. Die letzten beiden Abschnitte enthalten Entwicklungen, in denen die Anwendung der algebraischen Methode auf Probleme der Getriebesynthese gezeigt wurde, die bisher als unlösbar galten. Die Darstellung ist einfach, wenn auch die Durchführung der Berechnung ohne besondere Hilfsmittel nicht ohne weiteres möglich ist. Die einfachen Ergebnisse lassen jedoch erhoffen, daß sich weitere aufschlußreiche Untersuchungen durchführen lassen werden.

(Eingegangen am 31. Januar 1956)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *K.-H. Sieker*, Berlin-Schlachtensee, Niklasstraße 62

Experimenteller Beitrag zur Entstehung turbulenter Strömung im Rohr

Von J. Rotta

1. Einleitung. Die turbulenten Stömungen gehören heute zu den wesentlichsten Objekten der Strömungsforschung, da noch eine große Zahl offener Fragen zu beantworten ist. Als sehr bedeutend gelten die Fragen, die mit der Entstehung der Turbulenz zusammenhängen. Daher hat sich in neuerer Zeit das Interesse der Strömungsforschung viel den Gebieten zugewandt, in denen weder laminare noch voll turbulente Strömung herrscht. Zu sehr aufschlußreichen Ergebnissen führten experimentelle Untersuchungen der Strömungsstruktur bei der Plattengrenzschicht.

Für die Strömung im zylindrischen Rohr sind ähnliche Untersuchungen nicht bekannt geworden, obwohl diese Strömung von einfacherem Typus ist und manche grundsätzlichen Effekte dabei deutlicher hervortreten. Es ist die Tatsache, daß die Rohrströmung nach einer gewissen Einlauflänge einem stationären Endzustand zustrebt, so daß dann weiterhin die Lauflänge als Einflußgröße fortfällt, die dieser Strömung Bedeutung als Studienobjekt zur Lösung grundsätzlicher Fragen verleiht. Dies war der Anlaß, Versuche in der Nähe der kritischen *Reynolds*zahl durchzuführen, die hier mitgeteilt und diskutiert werden sollen.

Eine große Menge von Erkenntnissen über das Auftreten turbulenter Strömung im Rohr ist den Arbeiten *L. Schillers*[1] zu verdanken. Es ist bekannt, daß die Größe der *Reynolds*zahlen, bei denen der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung im Rohr stattfindet, weitgehend durch die Strömungsverhältnisse am Rohreinlauf bedingt ist. Aus der Versuchserfahrung weiß man ferner seit langem, daß dieser Übergang im allgemeinen nicht plötzlich vor sich geht, sondern daß es einen endlichen Bereich von *Reynolds*zahlen gibt, in denen die Strömung weder ganz laminar noch ganz turbulent ist. Aber über die Ursachen dieses Verhaltens bestehen noch jetzt eine Anzahl von Unklarheiten.

Gerade hinsichtlich der Rohrströmung hatte die Tatsache, daß es zwei verschiedene Strömungsformen gibt, sehr zeitig das Interesse der Forscher angeregt. Vor allem hatte sich *O. Reynolds*[2] mit dem Problem beschäftigt und unter anderem festgestellt, daß man bei allmählicher Erhöhung der Geschwindigkeit durch einen Bereich kommt, in welchem die Strömung abwechselnd laminar und turbulent ist. Beim Ausfließen von Wasser aus einem Rohr wird dieses intermittierende Auftreten turbulenter Strömung, das für das Übergangsgebiet typisch ist, durch Pendeln des frei ausfließenden Strahles sichtbar. Aus diesen Pendelbewegungen wurde auf zeitliche Schwankungen der Ausflußgeschwindigkeit geschlossen. Die Erscheinung wurde von *O. Tietjens*[3] wie folgt interpretiert:

„Dabei entsprechen den Höchstwerten der Geschwindigkeiten immer diejenigen Augenblicke, in denen plötzlich innerhalb einer gewissen Rohrstrecke Turbulenz einsetzt. Durch den hiermit bedingten größeren Strömungswiderstand im Rohr nimmt die Ausflußgeschwindigkeit mit der Zeit ab, währenddessen die turbulent strömende Flüssigkeitsmasse durch das Rohr hindurchströmt. Sobald diese das Rohr zu verlassen beginnt, nimmt der Widerstand im Rohr wieder ab, was eine Zunahme der Geschwindigkeit zur Folge hat, bis wieder teilweise Turbulenz einsetzt und der eben beschriebene Vorgang sich wiederholt."

Unterstellt man die Richtigkeit dieser Deutung, so stellt sich die Frage, ob sich auch noch intermittierend turbulente Strömung zeigt, wenn die erwähnten Schwankungen der Ausflußmenge durch geeignete Maßnahmen verhindert werden, oder ob dann die Strömung einen anderen Charakter annimmt. Diese Frage war der Ausgangspunkt der vorliegenden Versuche. Es war daher zunächst eine Versuchsanlage zu schaffen, bei der die Durchflußmenge vom Strömungswiderstand des Versuchsrohres nicht beeinflußt wird.

---

[1] *L. Schiller*, Strömung in Rohren, Handb. d. Exp. Physik, Bd. IV, 4. Leipzig 1932.
[2] *O. Reynolds*, Phil. Trans. Roy. Soc. London 1883 oder Scient. Papers Vol II, S. 51.
[3] *O. Tietjens*, Hydro- und Aeromechanik, Bd. II, S. 38 ff. Berlin 1931.

2. Versuchseinrichtung und Durchführung der Versuche. Mit Rücksicht auf beabsichtigte Hitzdrahtuntersuchungen sollte Luft als Strömungsmedium verwendet werden. Um die Größe der Durchflußmenge von Schwankungen des Durchflußwiderstandes unabhängig zu machen, war es naheliegend, die Durchflußmenge vermittels einer Düse zu regeln, die mit Schallgeschwindigkeit durchströmt wird. Ist F_D der Öffnungsquerschnitt einer solchen Düse, so ist die in der Zeiteinheit durchströmende Menge

$$\dot{M} = \left(\frac{2}{1+\varkappa}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} F_D \sqrt{\frac{2\varkappa}{1+\varkappa} p_D \varrho_D}\,. \tag{1}$$

Sie ist also außer von $F_D = \pi d_D^2/4$ nur von dem Druck p_D, der Dichte ϱ_D der Luft vor der Düse und dem Verhältnis der spezifischen Wärmen $\varkappa$ ($\varkappa = 1{,}4$ für Luft) abhängig. Ordnet man eine solche Düse vor dem Versuchsrohr an, so ist die Durchflußmenge sicher von Druckschwankungen im Rohr unabhängig, solange der Druck hinter der Düse kleiner als der kritische Druck

$$p_{krit} = p_D \left(\frac{2}{1+\varkappa}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \approx 0{,}53\, p_D \tag{2}$$

ist.

Weiter sollte der Durchmesser des Versuchsrohres nicht zu klein gewählt werden, um auch Geschwindigkeitsverteilungen messen zu können. Um nun bei den kleinen *Reynolds*zahlen trotzdem Druckdifferenzen meßbarer Größe zu erhalten, erwies es sich als zweckmäßig, im Ver-

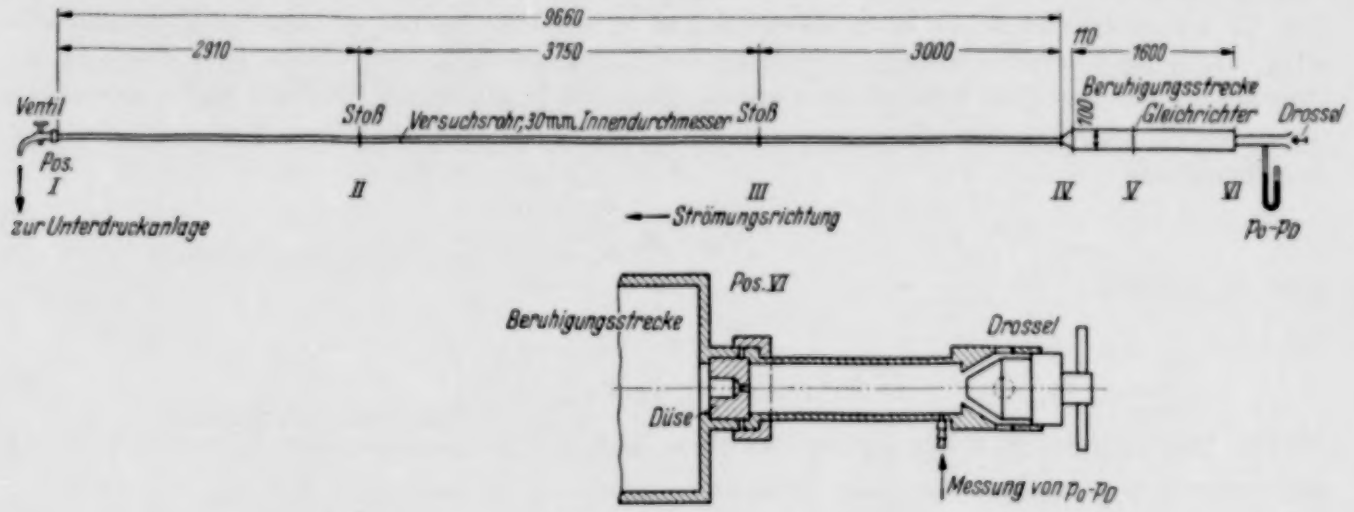

Abb. 1. Versuchsanlage.

suchsrohr einen möglichst niedrigen Druck p_1 zu haben. Es wurde deshalb die in Abb. 1 schematisch dargestellte Versuchsanordnung gewählt, die an die im Institut vorhandene Unterdruckanlage (Pumpe und Unterdruckkessel) angeschlossen wurde. Die Luft wurde durch die erwähnte Düse, die bei Pos. VI angebracht war, aus dem Raum angesaugt und gelangte nach Durchströmen der Beruhigungsstrecke mit eingebautem Gleichrichter in das eigentliche Versuchsrohr von insgesamt 10 m Länge und einem Innendurchmesser $d = 30$ mm. Der statische Druck p_1 in der Versuchsstrecke konnte durch mehr oder weniger starkes Öffnen des Ventils bei Pos. I variiert werden. Es gelten folgende Beziehungen:

Die Temperatur T_1 der Luft im Rohr sei[1] gleich der Raumtemperatur T_0. Nach dem Gesetz der idealen Gase ist dann die Dichte der Luft im Rohr

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{p_1}{p_0}\,. \tag{3}$$

Zwischen durchströmender Menge und der Durchflußgeschwindigkeit U gilt die Beziehung

$$\dot{M} = \varrho_1\, U \frac{\pi d^2}{4}\,. \tag{4}$$

[1] Die Temperaturabminderung als Folge des *Joule-Thompson*-Effekts bei Durchströmung der Düse ist vernachlässigbar.

Diese ist gleich der durch die Düse nach (1) gegebenen Menge. Die Rohr-*Reynolds*zahl ist

$$Re = \frac{\varrho_1 U d}{\mu}. \tag{5}$$

Da nun die Zähigkeit μ nur von der Temperatur der Luft abhängt, $\varrho_1 U$ nach (4) ebenso wie $\dot{M}$ von p_1 unabhängig ist, so bleibt die *Reynolds*zahl Re unabhängig vom Druck p_1, solange die Bedingung (2) erfüllt ist. Somit ist der Strömungszustand in der Versuchsstrecke bei gegebener Düse und gegebenen Daten der Raumluft (p_0, ϱ_0, T_0) für jedes p_1 ähnlich.

Der mit der Durchflußgeschwindigkeit U gebildete mittlere Staudruck $\bar{q}^*$ errechnet sich zu

$$\bar{q}^* = \frac{\varrho_1 U^2}{2} = \frac{\dot{M}^2}{2 (d^2 \pi/4)^2 \varrho_1} = \frac{\dot{M}^2 p_0}{2 (d^2 \pi/4)^2 \varrho_0 p_1}. \tag{6}$$

Dieser Staudruck und wegen der Ähnlichkeit der Strömung ebenso die mit anderen Geschwindigkeiten gebildeten Staudrücke und auch der Druckabfall im Rohr sind dem Druck p_1 umgekehrt proportional. Hier liegt einer der Vorteile dieser Versuchsanordnung, daß die zu messenden Drücke durch Erniedrigung von p_1 erhöht werden können, ohne daß sich dabei die *Reynolds*zahl ändert. Es zeigte sich, daß bei einem praktisch realisierbarem Druck $p_1 = 30$ mm Hg-Säule bei gleichen Abmessungen des Rohres und gleicher *Reynolds*zahl mit Luft als Strömungsmedium größere Staudrücke erzielt werden konnten als es mit Wasser möglich gewesen wäre.

Im Normalfall sind der Druck p_D und die Dichte ϱ_D vor der Düse gleich den entsprechenden Werten der Luft im Raum. Aus den Gleichungen (1), (4) und (5) erkennt man dann, daß für jede *Reynolds*zahl ein anderer Düsenöffnungsquerschnitt F_D erforderlich ist. Die Düsen bei Pos. VI waren deshalb leicht auswechselbar, und es war eine Anzahl verschiedener Größen vorrätig. Eine noch feinere, stetige Änderung der *Reynolds*zahl konnte durch Beeinflussung des Druckes p_D vor der Düse ermöglicht werden. Dies wurde durch ein vor der Düse angebrachtes Drosselventil verwirklicht. Mit der nach dem Gasgesetz bei gleichbleibender Temperatur geltenden Beziehung

$$\varrho_D = \varrho_0 \frac{p_D}{p_0}, \tag{7}$$

geht (1) über in

$$\dot{M} = \left(\frac{2}{1+\varkappa}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} F_D p_D \sqrt{\frac{2\varkappa}{1+\varkappa} \frac{\varrho_0}{p_0}}. \tag{8}$$

Die Messung des Druckes p_D vor der Düse und der Raumtemperatur T_0 waren hiernach ausreichend, um die *Reynolds*zahl im Rohr zu bestimmen. Die zusätzliche Messung des statischen Druckes p_1 im Rohr ermöglichte die Ermittlung der Durchflußgeschwindigkeit U und des Staudrucks $\bar{q}^*$. Diese Methode zur Bestimmung von Re und U ist sehr zuverlässig; Voraussetzung ist allerdings, daß die Versuchsanlage sorgfältig abgedichtet ist, so daß nicht an Flanschverbindungen oder dgl. Nebenluft einströmen kann. Die ausreichende Abdichtung bereitete keine Schwierigkeiten. Die benutzten Düsen wurden vorher durch eine Mengenmessung geeicht. Die Größe von p_1 wurde durch ein Quecksilber-Barometer gemessen, ebenso der Druck der Raumluft. Zur Messung der Differenz $p_0 - p_D$ zwischen den Drücken im Raum und vor der Düse wurde ein *Prandtl*-Manometer mit Quecksilberfüllung benutzt.

Zwischen der Beruhigungsstrecke und der Versuchsstrecke war ein 110 mm langer, allmählicher Übergang vorgesehen. Das Kontraktionsverhältnis war 1:11,1. An den Stoßstellen des Rohres wurden die Innenkanten sehr sorgfältig bearbeitet, so daß hier keine Störungen der Strömung verursacht werden konnten. In diesem Zustand der Anlage blieb die Strömung bis zu *Reynolds*zahlen von $Re = 18000$ laminar.

Um das Auftreten turbulenter Strömung möglichst nahe an die untere Grenze der *Reynolds*zahlen zu bringen, wurden bei Pos. IV verschieden grobe Siebe oder Blenden eingebaut. Abb. 2 zeigt die 3 Rohreinläufe, bei denen die niedrigsten *Reynolds*zahlen für das Einsetzen der Turbulenz erzielt wurden. Bei der mit Nr. 1 bezeichneten Ausführung war eine scharfkantige Lochblende hinter der Kontraktion eingebaut. Als nächster Schritt zur Verstärkung der Störungen wurde die Beruhigungsstrecke fortgelassen und die Regeldüse direkt vor das Rohr gesetzt, Nr. 2. Auf diese Weise wurde die Luft durch einen turbulenten Überschallstrahl in das Versuchsrohr eingeführt. Bei Nr. 3 wurde die Luft durch 3 Überschallstrahlen nahe der Rohrwand zugeführt.

Mit dieser Versuchsanlage wurden Druckabfallmessungen, Hitzdrahtuntersuchungen und Staudruckmessungen durchgeführt. Die Hitzdrahtuntersuchungen dienten zum Studium der Strömungsstruktur. Zur Verstärkung der von den Geschwindigkeitsänderungen erzeugten Änderungen des elektrischen Stromes stand ein vorhandener Turbulenzverstärker (Wechselstromverstärker) nach *H. Schuh*[1] zur Verfügung. Dieser wurde in Verbindung mit einem Elektronen-Oszillographen zur visuellen Beobachtung der Strömung benutzt. Da dieser Verstärker auf schnelle Stromänderungen anspricht, war diese Methode zur Feststellung, ob laminare oder turbulente Strömung vorliegt, gut geeignet. Um aber auch die langsamer verlaufenden Geschwindigkeitsänderungen zu erfassen, wurde ein zweistufiger Gegentakt-Gleichspannungsverstärker gebaut, Abb. 3. Mit dessen Hilfe konnte der gesamte Geschwindigkeitsverlauf über der Zeit von einem Schleifen-Oszillographen sichtbar gemacht und aufgeschrieben werden.

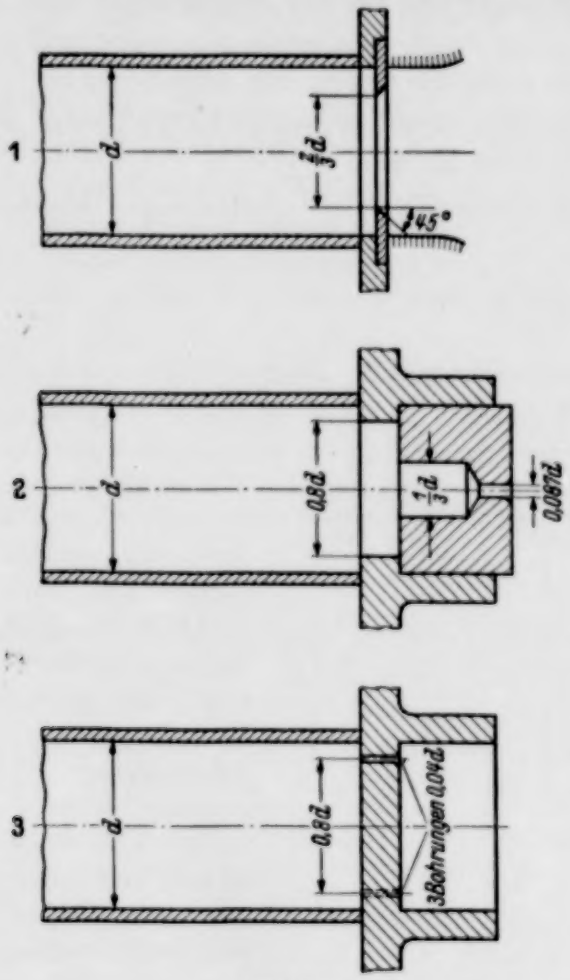

Abb. 2.
Rohreinläufe bei Pos. IV.

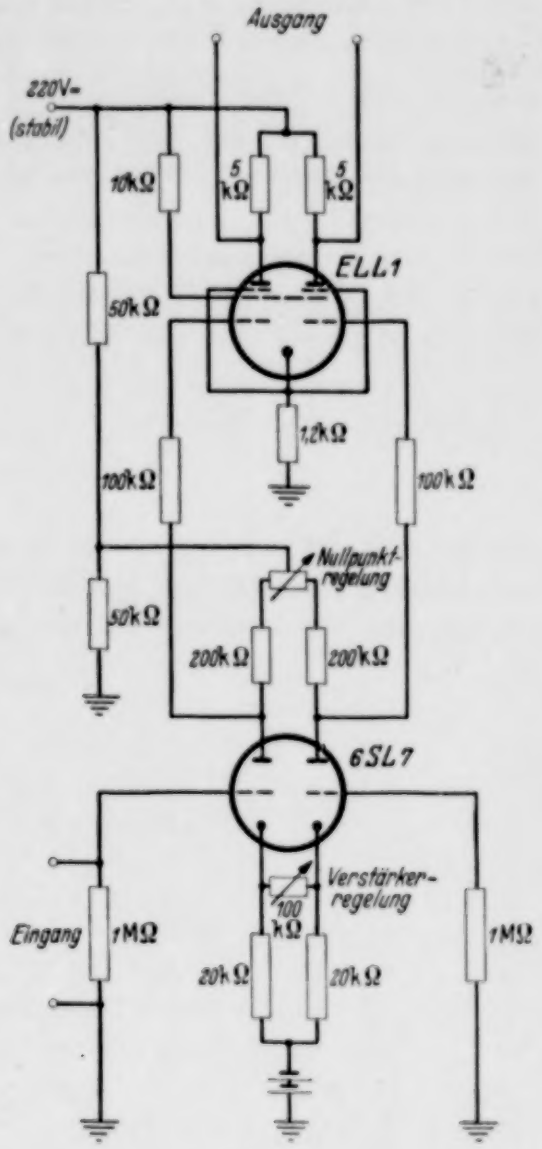

Abb. 3.
Zweistufiger Gegentakt-Gleichspannungsverstärker.

Bei den Staudruckmessungen und den Messungen des Druckabfalls wurden die Druckdifferenzen mit einem Projektionsmanometer nach *Betz* gemessen. Daß dabei der statische Druck im Rohr sehr viel niedriger als im Raum war, hatte keinen unmittelbaren Einfluß auf die Messung, wenigstens nicht, solange der Druck noch größer als der Dampfdruck des als Meßflüssigkeit dienenden Wassers war. Zur Dämpfung der im Übergangsgebiet zwischen laminarer und turbulenter Strömung auftretenden, heftigen Druckschwankungen wurden in die Leitungen zwischen Meßstellen und Manometer Kapillaren geschaltet, um eine zuverlässige Ablesung der zeitlichen Mittelwerte der Drücke zu ermöglichen. Die Durchführung genauer Druckmessungen war jedoch sehr mühselig und zeitraubend. Der hohe Widerstand der Druckleitungen hatte lange Einstellzeiten zur Folge und machte außerdem die Anzeige sehr empfindlich gegen minimale Undichtigkeiten in den Leitungen und im Manometer. In Verbindung mit den relativ großen Luftvolumina unterschiedlicher Größe über den beiden Flüssigkeitsspiegeln des Projektionsmanometers ergab sich ferner eine große Empfindlichkeit gegen kleinste Änderungen des

[1] *H. Schuh*, Ein elektrisches Turbulenzmeßgerät, Deutsche Luftfahrtforschung UM 6607 (1944).

statischen Druckes p_1 (verursacht durch unregelmäßigen Lauf der Pumpe). Weitere Schwierigkeiten bereitete der Umstand, daß in den Leitungen von Zeit zu Zeit Kondenswasser niederschlug, das die Kapillaren oder die Druckanbohrungen im Versuchsrohr verstopfte. Die Leitungen waren daher öfter zu entlüften.

Die Staudruckmessungen zur Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilungen, die mit einem üblichen *Pitot*rohr durchgeführt wurden, mußten mit einer Korrektur für den Einfluß der Zähigkeit versehen werden, da die *Reynolds*zahl des *Pitot*rohres z. T. sehr klein war. Gemäß einer Arbeit von *K. Wieghardt*[1] wurde für diese Korrektur die Beziehung

$$\bar{q}_{Mess} = \bar{q}\left(1 + \frac{100\,\nu^2}{\bar{u}^2\,d_P^2}\right) \tag{9}$$

benutzt, wobei $\bar{q}$ der wirkliche Staudruck und $\bar{q}_{Mess}$ der gemessene Wert des Staudrucks, $\bar{u}$ der zeitliche Mittelwert der Geschwindigkeit, d_P der Durchmesser des Pitotrohres und ν die kinematische Zähigkeit ist. Setzt man $\bar{u}^2 \approx 2\,\bar{q}/\varrho$, so ergibt sich für den wirklichen Staudruck

$$\bar{q} = \bar{q}_{Mess} - \frac{50\,\nu^2\,\varrho}{d_P^2}\,. \tag{10}$$

Das Korrekturglied ist von der örtlichen Geschwindigkeit unabhängig und damit für gegebenen Strömungszustand über den Querschnitt des Rohres konstant.

Die aus den *Pitot*rohrmessungen ermittelten Geschwindigkeitsverteilungen stimmten hinsichtlich der Durchflußmenge

$$M = 2\pi\varrho\int_0^R \bar{u}\,r\,dr \tag{11}$$

mit der nach (8) sich ergebenden Menge mitunter nicht genau überein. Dies war insbesondere bei kleineren Durchflußmengen der Fall. Da die Bestimmung von $\dot{M}$ nach (8) zuverlässiger erscheint, sind die Ursachen für die Diskrepanz wahrscheinlich in den Unzulänglichkeiten der *Pitot*rohrmessungen zu suchen. Neben zufälliger Streuung einzelner Meßpunkte sind wohl hauptsächlich kleine unkontrollierbare Undichtigkeiten und die geringe, dem *Betz*-Manometer eigene Schwankung des Nullpunktes hierfür verantwortlich zu machen. Um diesen Einflüssen Rechnung zu tragen, wurde eine weitere, kleine, über den Querschnitt jeweils konstante Korrektur Δq angebracht, die so festgelegt wurde, daß die Durchflußmenge nach (11) mit der nach (8) übereinstimmt. Die nach dieser Methode ermittelten Geschwindigkeitsverteilungen bei laminarer Strömung brachten ausgezeichnete Übereinstimmung mit der Theorie. Die Auswertungsmethode wurde daher als brauchbar erachtet und auf das Übergangsgebiet der Strömung angewandt.

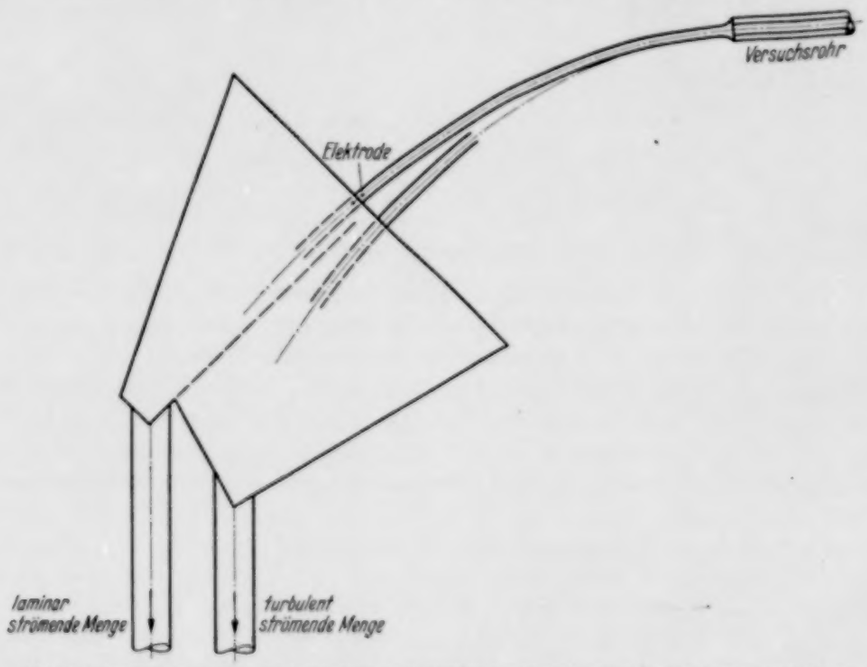

Abb. 4. Getrenntes Auffangen turbulent und laminar ausströmender Flüssigkeit und Zählung der Strömungswechsel.

Außer den Versuchen mit der beschriebenen Anlage wurden noch Versuche mit Glasrohren und Wasser als Strömungsmedium durchgeführt, bei denen Beobachtungen des frei ausfließenden Strahles vorgenommen wurden. Die Glasrohre hatten etwa 3 bis 6 mm Innendurchmesser und

[1] *K. Wieghardt*, Einige Bemerkungen über das *Pitot*rohr und die Zylindersonde, unveröffentlichter Bericht aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung (1946).

waren bis zu 1,50 m lang. Das Wasser wurde einem 7 m über dem Versuchsrohr gelegenen Vorratsbehälter entnommen. Der Strömungswiderstand des Versuchsrohres war klein gegenüber dem dieser Fallhöhe entsprechenden Druck. Zwischen Rohr und Behälter befand sich eine Drossel zur Regelung der Durchflußmenge, deren Widerstand daher groß im Vergleich zum Rohrwiderstand war. So war auch bei diesen Versuchen die Gefahr ausgeschlossen, daß Schwankungen des Rohrwiderstandes Rückwirkung auf die Durchflußmenge hatten. Bei einem Teil dieser Versuche wurde die Wurfweite des austretenden Strahles mit einem Theodoliten vermessen; die in der Zeiteinheit ausfließende Wassermenge wurde mit Meßzylinder und Stoppuhr ermittelt.

Die bekannten, schon erwähnten Pendelbewegungen des Strahles die im Bereich der kritischen *Reynolds*zahl auftreten, ermöglichen es, die turbulent und laminar ausströmende Wassermenge mit einem Doppeltrichter getrennt aufzufangen und zu messen, Abb. 4. Eine oberhalb der Trennwand im Trichter angebrachte Elektrode schloß jeweils beim Ankommen der laminaren Strömung einen Stromkreis zu einem Zählwerk, so daß auch die Anzahl der Wechsel ermittelt werden konnte. Der Reiz dieser Versuchsmethode liegt in ihrer Einfachheit. Jedoch war einige Sorgfalt erforderlich, um reproduzierbare Versuchsergebnisse zu erhalten. Die Verteilung der Menge und die registrierte Zahl der Wechsel ist sehr von der Einstellung des Trichters zum Strahl abhängig. Es war notwendig, eine eigens hierfür markierte Stelle des Trichters sehr genau zum laminaren Strahl auszurichten. Außerdem ändert sich in einem bestimmten *Reynolds*zahl-Bereich das Verhältnis der Mengen so rasch mit der *Reynolds*zahl, daß ein Meßfehler in der Gesamtmenge die gleiche Abweichung von der mittleren Kurve ergibt wie ein 10mal so großer Fehler des Verhältnisses der getrennt aufgefangenen Mengen. Eine gewisse Streuung der Versuchsergebnisse mußte aus diesem Grunde in Kauf genommen werden.

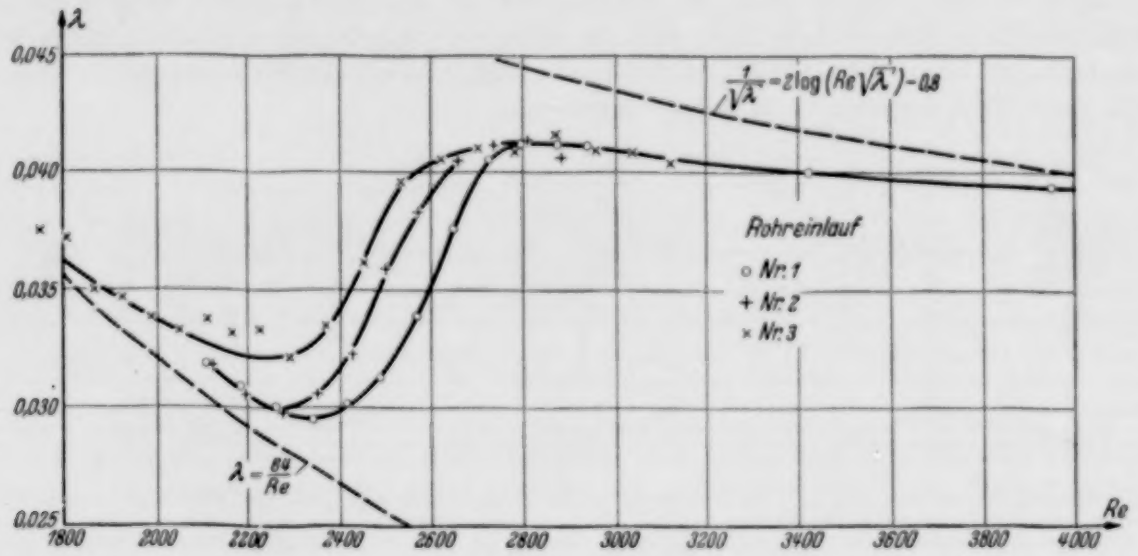

Abb. 5. Druckabfallmessungen.

3. Druckabfallmessungen. Die Untersuchung der Strömung im Bereich der kritischen *Reynolds*zahl wurde mit einigen Messungen des Druckabfalls begonnen. Auf Abb. 5 sind die in der Versuchsanlage nach Abb. 1 gewonnenen Ergebnisse mit den Rohreinläufen nach Abb. 2 miteinander verglichen. Der dort über der *Reynolds*zahl *Re* aufgetragene Rohrwiderstandsbeiwert

$$\lambda = \frac{\bar{p}_2 - \bar{p}_1}{\frac{\varrho}{2} U^2} \frac{d}{\Delta x} \tag{12}$$

wurde aus der gemessenen Differenz $\bar{p}_2 - \bar{p}_1$ der zeitlich gemittelten statischen Drücke an den Positionen II und I errechnet. Δx ist die Entfernung der Meßstellen voneinander.

Bei Einlauftyp Nr. 1 findet der Anstieg von λ infolge Turbulentwerdens der Strömung bei etwas größeren *Reynolds*zahlen statt als bei Einlauf Nr. 2, bei dem die Düse unmittelbar vor das Versuchsrohr gesetzt wurde. Die einströmende Luft führt bei diesem Einlauf eine unvergleichlich höhere kinetische Energie mit sich als bei Einlauf Nr. 1. Bei Einlauf Nr. 3 hat die kinetische Energie der einströmenden Luft etwa den gleichen Betrag, wie bei Einlauf Nr. 2, nur wird jetzt die Luft mit ihrer Energie in Regionen eingeführt, die für die Turbulenzentstehung günstiger sind. Dementsprechned beginnt der Anstieg von λ bei noch kleineren *Reynolds*zahlen.

Diese Ergebnisse veranschaulichen zweierlei:

1. In allen Fällen besteht trotz großer Rohrlänge ein endliches Intervall von *Reynolds*zahlen, in denen die Strömung nicht laminar, offenbar aber auch nicht voll turbulent ist.

2. Die Größe und Art der Störung im Einlauf hat auch bei gröbsten Maßnahmen noch eine Auswirkung auf die Größe der *Reynolds*zahlen, bei denen sich der Wechsel von laminarer zu turbulenter Strömung vollzieht. Es bedarf wohl eines erheblichen Aufwandes, um die Strömung, die der unteren Grenze für diesen Wechsel entspricht, experimentell darzustellen, obwohl kein Zweifel besteht, daß es eine solche untere Grenze gibt.

4. Hitzdrahtuntersuchungen. Im Bereich der kritischen *Reynolds*zahl angestellte Beobachtungen der Strömung am Ende des Rohres (bei Pos. I), bei denen die vom Hitzdraht gelieferten Stromschwankungen auf dem Schirm eines Elektronen-Oszillographen sichtbar gemacht wurden, zeigten, daß das von Ausflußversuchen her bekannte intermittierende Auftreten turbulenter Strömung auch hier eintritt. Und zwar konnte die Erscheinung bei allen untersuchten Formen des Einlaufs festgestellt werden. Schwankungen der Durchflußmenge durch die Düse am Eintritt waren ausgeschlossen; es war aber noch zu prüfen, ob nicht die Beruhigungsstrecke und das Rohr ein Reservoir darstellte, das unter dem Einfluß der Kompressibilität der Luft Ursache zu Schwankungen der Durchflußmenge im Rohr gab. Dies wäre denkbar, wenn die Schwankungen des Druckabfalls mit der Größe des statischen Druckes in der Versuchsstrecke vergleichbar wären. Bei den niedrigsten Werten des statischen Druckes $p_1 = 30$ mm Hg-S. betragen aber die möglichen Schwankungen des Druckabfalls nur wenig mehr als 1% von p_1. Die Hitzdrahtuntersuchungen wurden jedoch meistens bei höheren Drücken ($p_1 = 230$ mm Hg-S.) ausgeführt, weil die Schwankungen dann wegen der kleineren Strömungsgeschwindigkeiten besser zu beobachten waren. Hierbei waren aber die Schwankungen des Druckabfalls kleiner als $1^0/_{00}$ des statischen Druckes. Damit steht fest, daß das Pendeln zwischen laminarem und turbulentem Strömungszustand ohne Schwankungen der Durchflußgeschwindigkeit einhergeht. Dies ist eine der wichtigsten Feststellungen der Untersuchungen.

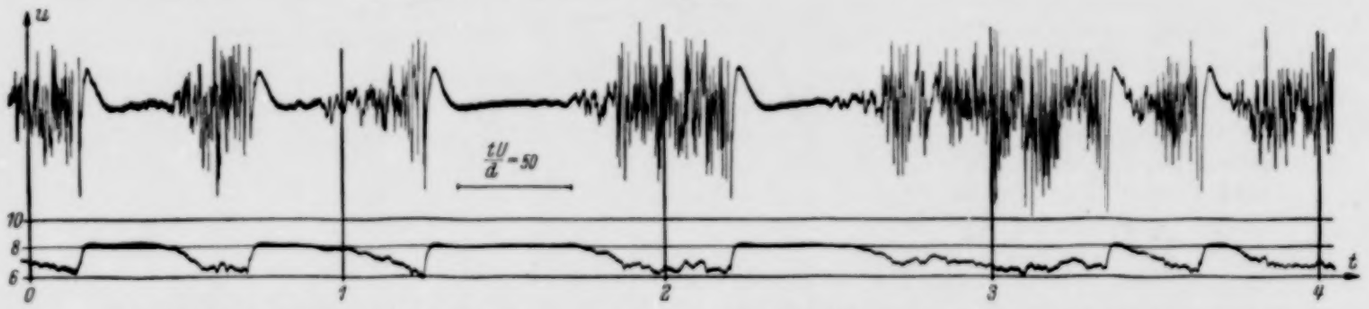

Abb. 6. Geschwindigkeitsschriebe in Rohrmitte bei $Re = 2550$. Rohreinlauf Nr. 1. Lauflänge $x/d = 322$. Obere Kurve: Aufzeichnung nur rascher Geschwindigkeitsschwankungen (Hitzdrahtstrom durch Wechselstromverstärker geleitet); untere Kurve: Gesamtverlauf der Geschwindigkeit (Hitzdrahtstrom durch Gleichspannungsverstärker geleitet). Geschwindigkeit u in m/sek.; Zeit t in sek.

Die Eigentümlichkeiten der Strömung werden durch eine Anzahl von Geschwindigkeitsschrieben veranschaulicht. Und zwar war die Versuchsanlage bei der Aufnahme dieser Schriebe, ebenso wie bei allen weiteren in der Folge wiedergegebenen Versuchsergebnissen mit dem Rohreinlauf Nr. 1, also mit der Lochblende hinter der Kontraktion ausgerüstet.

Abb. 6 zeigt einen Schrieb[1] bei $Re = 2550$, bei dem sich der Hitzdraht in Rohrmitte bei Pos. I befand. Die Stromschwankungen wurden einmal über den Turbulenzverstärker geleitet (obere Kurve) und zum anderen über den Gleichspannungsverstärker (untere Kurve). Aus der oberen Kurve sieht man deutlich das wechselweise Auftreten turbulenter und laminarer Strömung. Die untere Kurve gibt den tatsächlichen Geschwindigkeitsverlauf über der Zeit wieder und zeigt, daß jedesmal bei laminarer Strömung die Geschwindigkeit in Rohrmitte beträchtlich über dem Niveau der turbulenten Strömung liegt. Wie man ferner sieht, ist die Dauer der einzelnen Perioden unregelmäßig; die bei laminarer Strömung auftretende Erhöhung der Geschwindigkeit ist, mit Ausnahme bei sehr kurzzeitigem Auftreten laminarer Strömung, jedoch immer die gleiche.

Auf Abb. 7 sind entsprechende Geschwindigkeitsschriebe, unter Fortlassung der Turbulenzverstärker-Kurven, bei verschiedenen *Reynolds*zahlen dargestellt. Das unregelmäßige Auftreten turbulenter Strömung wird mit abnehmender *Reynolds*zahl immer seltener. Bei $Re =$

[1] Die Originalschriebe sind sehr lichtschwach und deshalb schlecht zu reproduzieren. Sie wurden daher photographisch etwa 4,5-fach vergrößert, dann mit der Hand nachgezogen und wieder verkleinert.

2320 ist nur noch vereinzelt turbulente Strömung zu beobachten. Letzterer Schrieb erweckt den Anschein, als ob das Wechseln jetzt von regelmäßiger Dauer wäre; dies ist jedoch nur ein Zufall. Bei *Reynolds*zahlen kleiner als $Re = 2200$ ist die Strömung vollkommen laminar; die im Einlauf

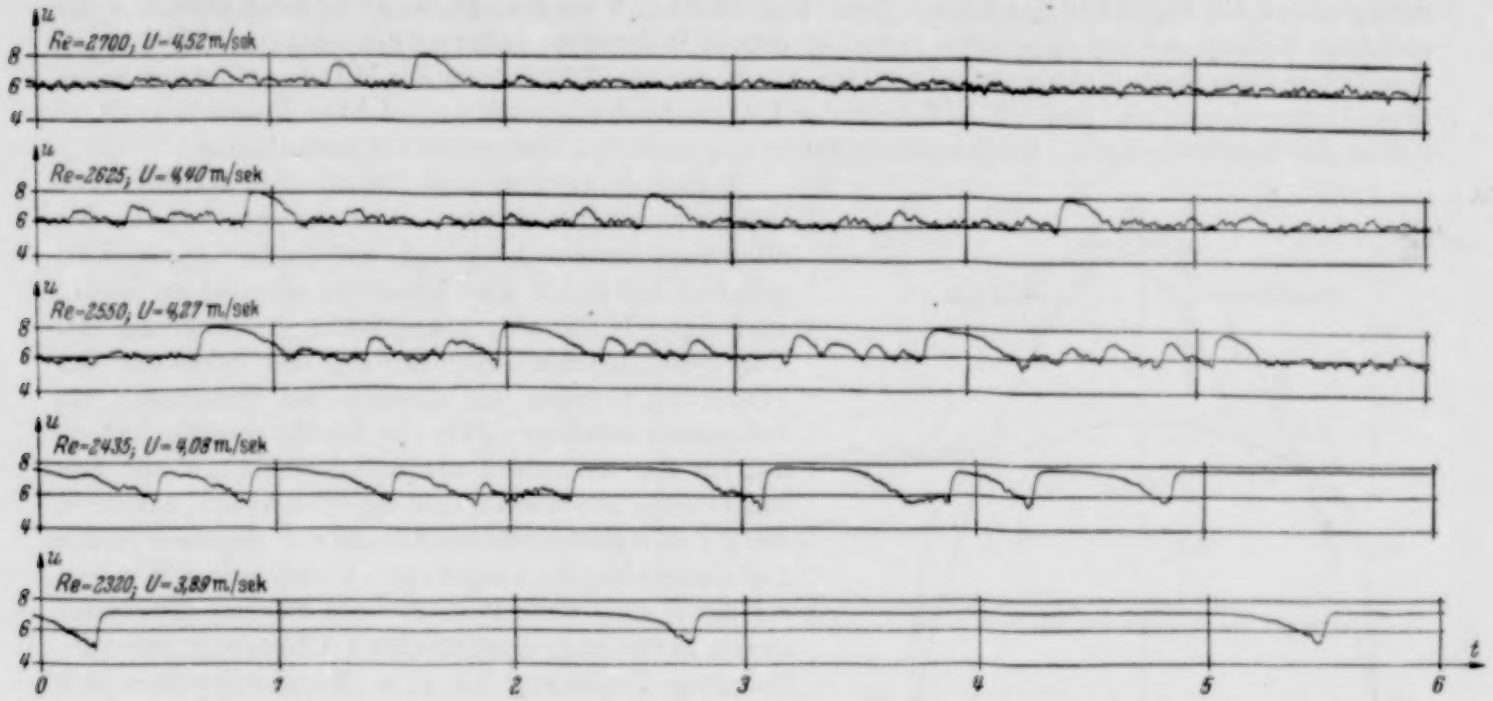

Abb. 7. Geschwindigkeitsschriebe. Gesamtverlauf der Geschwindigkeit in Rohrmitte bei verschiedenen *Reynolds*zahlen. Rohreinlauf Nr. 1. Lauflänge $x/d = 322$. Geschwindigkeit u in m/sek.; Zeit t in sek.

Abb. 8. Geschwindigkeitsschriebe. Gesamtverlauf der Geschwindigkeit bei $Re = 2550$ in verschiedenen Abständen von Rohrmitte. Rohreinlauf Nr. 1. Lauflänge $x/d = 322$. $U = 4{,}27$ m/sek. Geschwindigkeit u in m/sek.; Zeit t in sek.

erzeugten Störungen sind ganz abgeklungen. Bei $Re = 2800$ herrscht voll turbulente Strömung bei Pos. I.

Wie das Strömungsbild an verschiedenen radialen Abständen r/R von Rohrmitte aussieht, veranschaulicht Abb. 8 für $Re = 2550$. Aus diesen Geschwindigkeitsschrieben[1] muß man fol-

[1] Die Schriebe wurden nacheinander aufgenommen. Daher besteht keine zeitliche Zuordnung für die turbulenten Partien bei verschiedenen r/R.

gern, daß sich bei der abwechsend laminaren und turbulenten Strömung auch, zumindest angenähert, die Geschwindigkeitsverteilungen für die jeweils zugehörige ausgebildete Rohrströmung einstellt. Die zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsverteilungen bei ausgebildeter Rohrströmung bezogen auf die Durchflußgeschwindigkeit U, gibt Abb. 9 wieder. Diese Abbildung erläutert die auf Abb. 8 dargestellten Ergebnisse, nämlich daß in Rohrmitte während der laminaren Strömung eine höhere Geschwindigkeit als bei turbulenter herrscht. Weiter von der Mitte entfernt nehmen diese Unterschiede ab. Bei $r/R = 0{,}6$ ist der Unterschied nur noch unbedeutend, und bei $r/R = 0{,}8$ ist die Geschwindigkeit bei laminarer Strömung merklich kleiner als bei turbulenter.

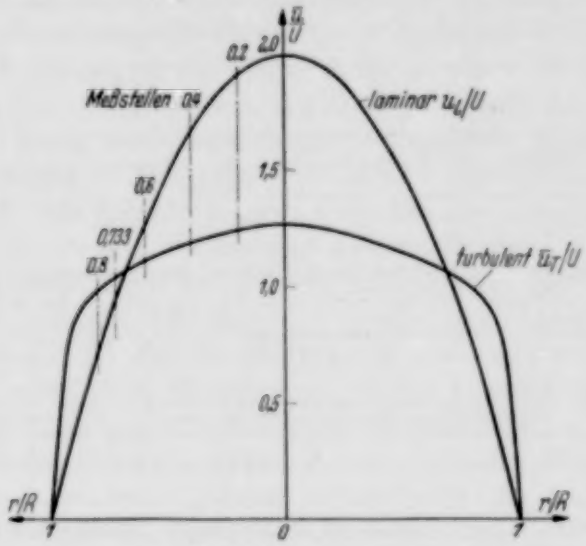

Abb. 9. Geschwindigkeitsverteilungen bei ausgebildeter Rohrströmung.

Durch Auszählen und Ausmessen der Schriebe wurde eine quantitative Analyse gewonnen, die allerdings keinen Anspruch auf große Genauigkeit erheben kann, da das Versuchsmaterial zu wenig umfangreich für eine statistische Auswertung ist. Zur quantitativen Beschreibung der Struktur der Strömung wurden als statistische Merkmale ein Intermittenzfaktor γ, der das durchschnittliche Verhältnis der turbulent strömenden Menge zur Gesamtmenge ausdrückt, und eine Intermittenzzahl $\bar{n}$, die die durchschnittliche Anzahl der Wechsel in der Zeiteinheit angibt, eingeführt. Unter einem Wechsel sei dabei eine volle Periode vom Beginn der laminaren Strömung, einschließlich Übergang zur turbulenten Strömung bis zum Wiedereinsetzen der

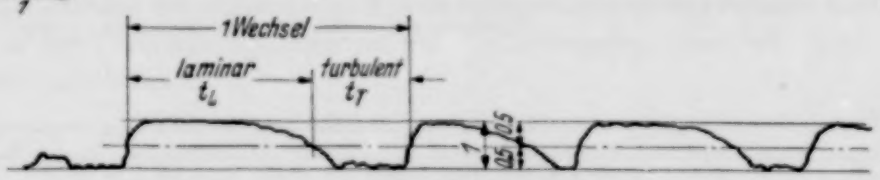

Abb. 10. Zur quantitativen Analyse der Hitzdrahtschriebe.

laminaren Strömung verstanden. Ist N die Zahl der innerhalb der Zeit T beobachteten Wechsel, so ist die Intermittenzzahl $\bar{n} = N/T$. Die Festsetzung der Grenze zwischen laminarer und turbulenter Strömung ist etwas willkürlich und wurde entsprechend Abb. 10 vorgenommen. Der Intermittenzfaktor γ ist dann definiert durch die Summe der Zeiten t_T in denen turbulente Strömung herrrscht, dividiert durch die Beobachtungszeit T, also $\gamma = \sum t_T/T$. Die Intermittenzzahl $\bar{n}$, mit der Durchflußgeschwindigkeit U und dem Rohrdurchmesser d dimensionslos gemacht, ist auf Abb. 11 über der *Reynolds*zahl aufgetragen. Darunter ist der Intermittenzfaktor γ dargestellt Die dimensionslose Intermittenzzahl hat in der Nähe der *Reynolds*zahl $Re = 2500$ ihr Maximum, bei der $\gamma \sim 0{,}5$ ist, d. h. bei der turbulente und laminare Strömung ungefähr gleich häufig sind.

Bei den Hitzdrahtschrieben ist weiterhin noch das Verhalten an den Turbulenzfronten — wenn man die Übergänge von einem Strömungszustand in den anderen so bezeichnen will — sehr bemerkenswert. Der Übergang vom turbulenten in den laminaren Zustand findet danach viel schroffer statt als der umgekehrte Übergang vom Laminaren ins Turbulente. Für dieses Verhalten sind die Schriebe mit Hilfe des Turbulenzverstärkers, Abb. 6, sehr aufschlußreich. Unmittelbar vor dem Beginn einer laminaren Partie sind die turbulenten Schwankungen der Geschwindigkeit besonders heftig, z. T. so heftig, daß sie nicht mehr registriert wurden. Ganz plötzlich verschwinden sie dann. Die darauf folgende Änderung der Geschwindigkeit spielt sich innerhalb einer Zeitspanne ab, die wesentlich unter der Zeitkonstanten des Wechselstromverstärkers liegt. Der Verstärker reagiert daher mit einem Ausschlag, der dann gemäß der Zeitkonstanten abklingt. Der Geschwindigkeitswechsel bei dem Übergang zu einer turbulenten Partie ist dagegen so langsam, daß die erwähnte Erscheinung nicht auftritt. Auch die Geschwindigkeitsschwankungen wachsen in diesem Fall von Null stetig an.

5. Staudruckmessungen. Als Ergänzung zu diesen Untersuchungen wurden Staudruckmessungen zur Ermittlung der zeitlichen Mittelwerte der Geschwindigkeitsverteilungen ausgeführt. Bei der Bestimmung der zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten aus den gemessenen zeitlichen

Mittelwerten der Staudrücke ist der quadratische Mittelwert der Geschwindigkeitsschwankungen von Einfluß, der aber nicht gemessen wurde. Eine theoretische Abschätzung für die Längsschwankungen beruht auf der von *L. A. Sackmann*[1] benutzten Annahme daß sich Partien mit voll ausgebildeter laminarer und voll ausgebildeter turbulenter Strömung miteinander abwechseln und hinreichend scharf ineinander überwechseln. Die Grundlagen und Ergebnisse sollen hier eingefügt werden, da sie zur Vertiefung der Vorstellung über das Wesen der intermittierend turbulenten Strömung beitragen.

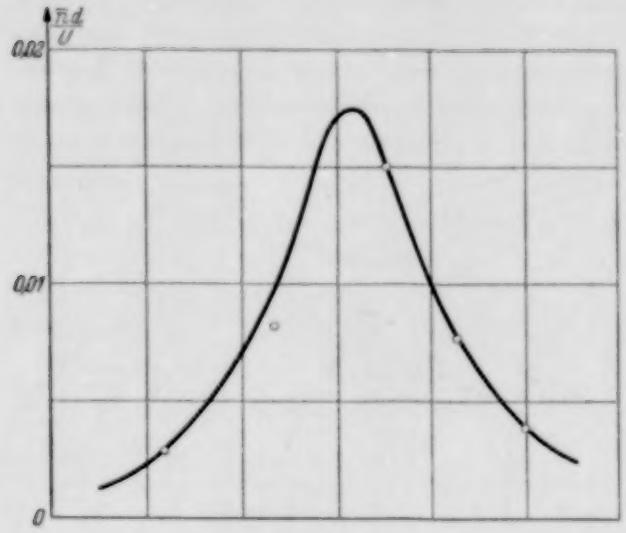

Abb. 11. Dimensionslose Intermittenzzahl und Intermittenzfaktor nach Hitzdrahtschrieben als Funktion der *Reynolds*zahl. Rohreinlauf Nr. 1. Lauflänge $x/d = 322$.

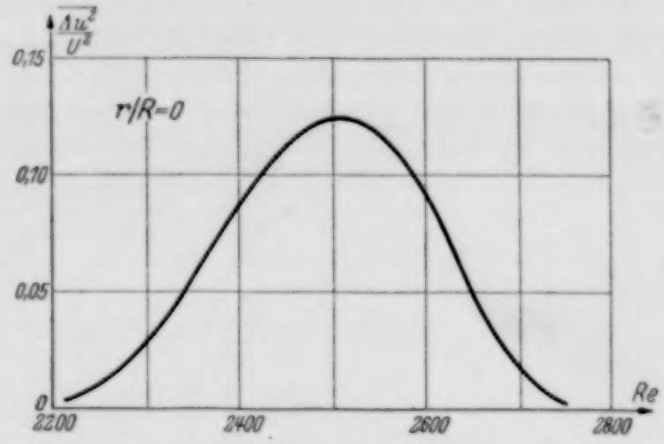

Abb. 12. Quadratischer Mittelwert der Längsgeschwindigkeitsschwankungen in Rohrmitte als Funktion der *Reynolds*zahl.

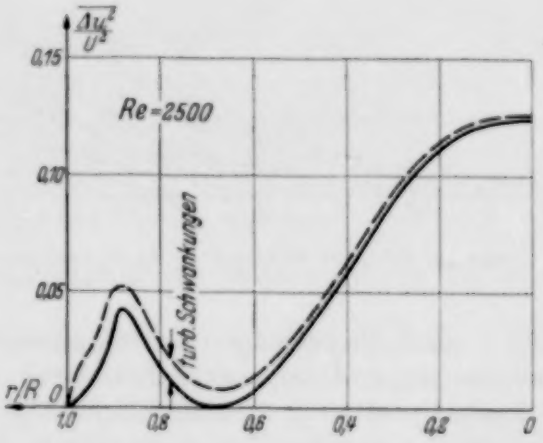

Abb. 13. Verteilung des quadratischen Mittelwertes der Längsgeschwindigkeitsschwankungen über den Rohrradius bei $Re = 2500$.

Während des Bruchteiles γ der Zeit, in welcher turbulente Strömung herrscht, ist die örtliche Geschwindigkeit im Durchschnitt gleich derjenigen der ausgebildeten turbulenten Rohrströmung, $u = \bar{u}_T$, und während des Bruchteiles $1 - \gamma$, in welchem die Strömung laminar ist, nimmt u den Wert der ausgegebildeten laminaren Rohrströmung an, $u = u_L$. Damit ergibt sich der zeitliche Mittelwert der Geschwindigkeit zu

$$\bar{u} = \gamma\, \bar{u}_T + (1 - \gamma)\, u_L\,. \tag{13}$$

Der quadratische Mittelwert der Geschwindigkeit ist dann

$$\overline{u^2} = \gamma\, \overline{u_T^2} + (1 - \gamma)\, u_L^2\,. \tag{14}$$

Bezeichnet man die Schwankungen der Geschwindigkeit mit $\Delta u = u - \bar{u}$, so folgt aus (13) und (14) für den quadratischen Mittelwert der Geschwindigkeitsschwankungen

$$\overline{\Delta u^2} = \overline{u^2} - \bar{u}^2 = \gamma\,(1 - \gamma)\,(u_L - \bar{u}_T)^2\,. \tag{15}$$

[1] *L. A. Sackmann*, C. R. 224, (1948), S. 793, S. 1326, C. R. 226 (1948) S. 1248, S. 1343, S. 1887, C. R. 227, (1948) S. 328, C. R. 239, (1954) S. 220, S. 389.

Mit den bekannten Geschwindigkeitsverteilungen bei ausgebildeter Rohrströmung, Abb. 9, und dem Intermittenzfaktor γ nach Abb. 11 läßt sich der quadratische Mittelwert für die Geschwindigkeitsschwankungen in Rohrachsenrichtung abschätzen. Auf Abb. 12 sind die sich so für Rohrmitte ergebenden Werte über der *Reynolds*zahl aufgetragen und Abb. 13 gibt eine Vorstellung von der Verteilung über den Rohrhalbmesser bei $Re = 2500$. In die letztere Darstellung ist noch der Beitrag der turbulenten Schwankungen, der nach den Messungen von *J. Laufer*[1] abgeschätzt wurde, mit eingetragen. Die Schwankungen der Geschwindigkeit unterscheiden sich im vorliegenden Fall sowohl nach Größe als auch hinsichtlich der Verteilung über den Radius erheblich von denjenigen voll turbulenter Strömung.

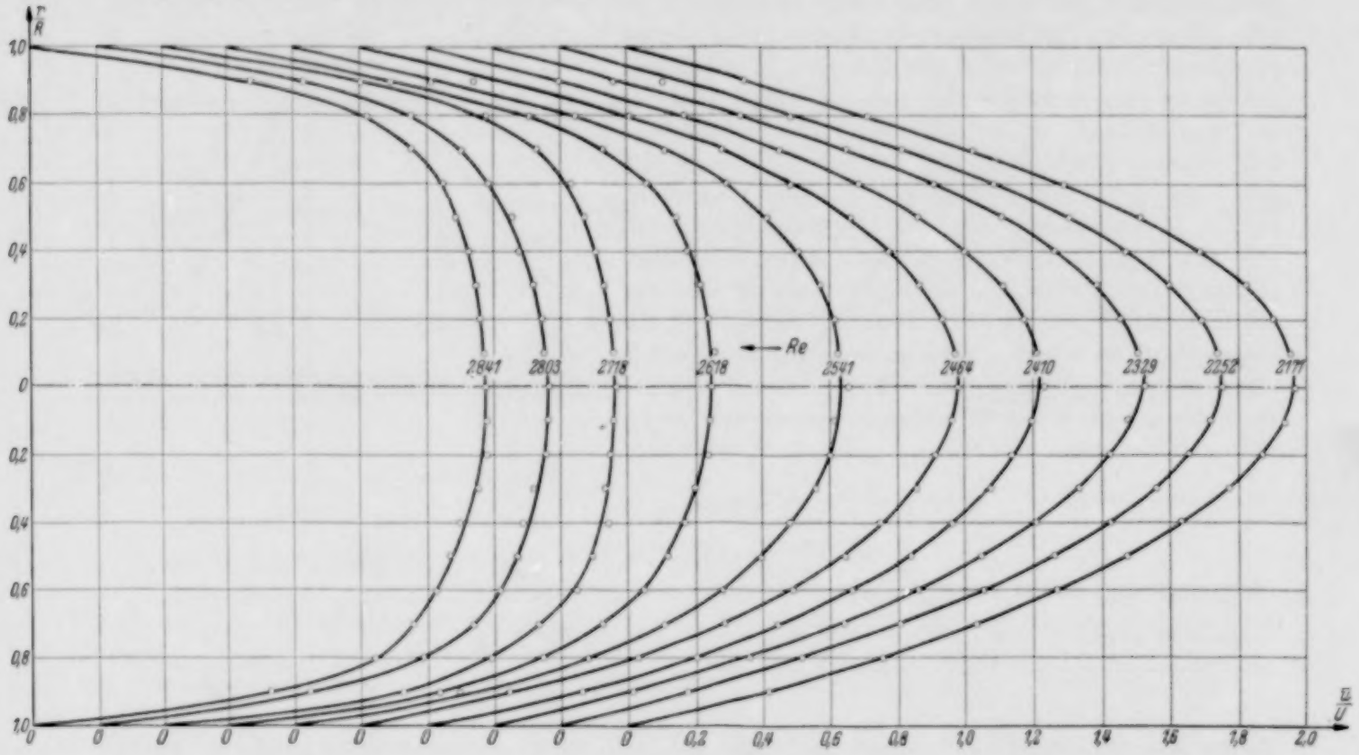

Abb. 14. Zeitlicher Mittelwert der Geschwindigkeitsverteilung bei intermittierendem Auftreten turbulenter Strömung. Rohreinlauf Nr. 1. Lauflänge $x/d = 322$.

Da diese Schwankungen im allgemeinen wesentlich größer als diejenigen voll turbulenter Rohrströmung sind, ist es erforderlich, bei der Auswertung der Staudruckmessungen wenigstens die Längsschwankungen zu berücksichtigen. Der zeitliche Mittelwert der Geschwindigkeit errechnet sich dann aus dem gemessenen und korrigierten zeitlichen Mittelwert des Staudrucks näherungsweise zu

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{2}{\varrho}\left(\bar{q} - \frac{\overline{\Delta u^2}}{U^2}\, q^*\right)}. \tag{16}$$

Auf Abb. 14 sind die so an der Meßstelle Pos. I ermittelten Geschwindigkeitsverteilungen für verschiedene *Reynolds*zahlen dargestellt. Man erkennt den allmählichen Übergang vom Profil der turbulenten Strömung in das Parabelprofil der laminaren Strömung, wenn die *Reynolds*zahl abnimmt. Die Geschwindigkeitsverteilungen an den Meßstellen Pos. II und III sind ähnlich. Nur erstreckt sich der Übergang von turbulenter zu laminarer Strömung an den Stellen näher dem Einlauf über ein größeres Intervall von *Reynolds*zahlen. Dies veranschaulicht Abb. 15, auf der über der *Reynolds*zahl die Geschwindigkeit in Rohrmitte aufgetragen ist, wie sie sich aus den Staudruckmessungen an den Meßstellen Pos. I, II und III ergibt. Es ist kein Anzeichen dafür vorhanden, daß bei Pos. I ein stationärer, d. h. von der Rohrlänge unabhängiger Endzustand erreicht ist.

Die Staudruckmessungen ergänzen also das aus den Hitzdrahtuntersuchungen gewonnene Bild durch das Ergebnis, daß die statistischen Eigenschaften der Strömung sich in der Nähe der kritischen *Reynolds*zahl mit der Lauflänge ändern und selbst nach einer Entfernung von mehr als 300 Durchmessern vom Einlauf noch keinen Endwert erreicht haben.

[1] *J. Laufer*, The structure of turbulence in fully developed pipe flow, NACA T. R. No. 1174, (1954).

6. Untersuchungen zur Wurfweite eines ausfließenden Wasserstrahles. Bei den bisher bekannt gewordenen Untersuchungen über das intermittierende Auftreten turbulenter Strömung ließ man Wasser aus einem Behälter durch ein Rohr strömen. Aus den beobachteten Pendelbewegungen des ausfließenden Strahles wurde auf zeitliche Schwankungen der Durchflußgeschwindigkeit U geschlossen, wie schon erwähnt wurde. Von dieser Voraussetzung ausgehend, hat in neuerer Zeit *L. A. Sackmann*[1] die Rohrströmung im Bereich der kritischen *Reynolds*zahl untersucht und analysiert. Wenn man von den Folgerungen betreffs der Schwankungen von U absieht, so decken sich die von ihm mitgeteilten Beobachtungen mit denen der hier beschriebenen Versuche weitgehend. So wurde festgestellt, daß das Pendeln des Ausflußstrahles im wesentlichen zwischen zwei Extremlagen stattfindet und in unregelmäßiger Folge vor sich geht. Auch wurde von *Sackmann* beobachtet, daß der Übergang von turbulenter in laminare Strömung viel rascher erfolgt als der umgekehrte Wechsel von laminarer in turbulente Strömung. Es ist daher zu vermuten, daß

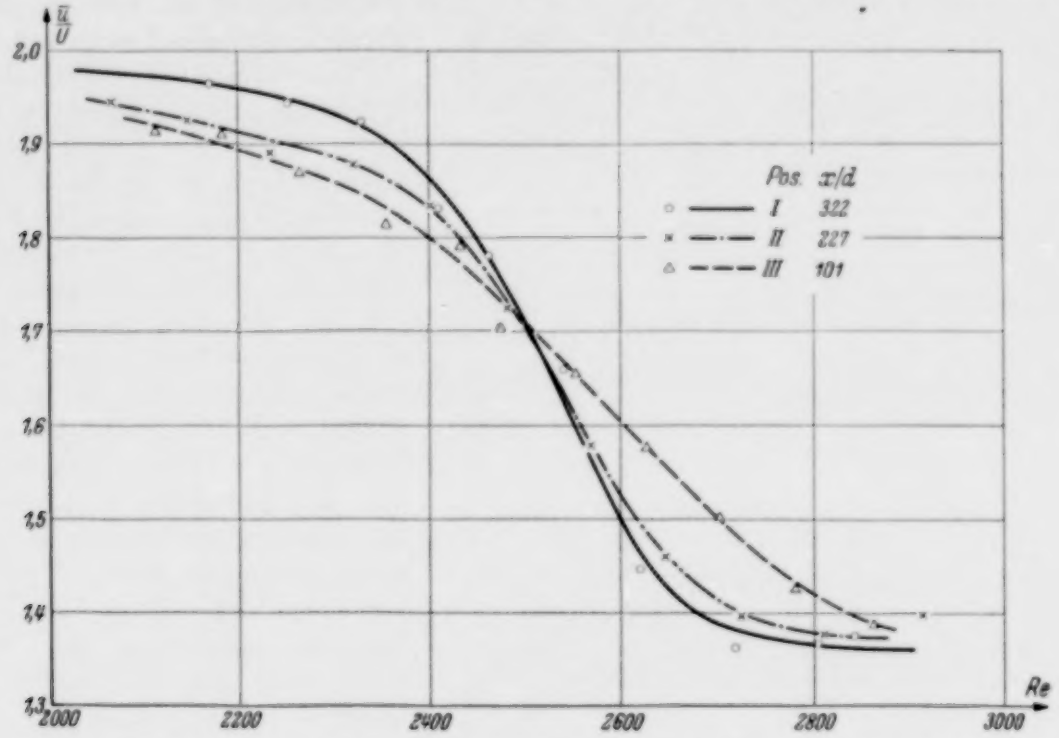

Abb. 15. Zeitlicher Mittelwert der Geschwindigkeit in Rohrmitte bei intermittierendem Auftreten turbulenter Strömung. Rohreinlauf Nr. 1.

die Strömung dort von der gleichen Art wie bei den hier beschriebenen Versuchen mit Luft war. Diese Vermutung wird noch dadurch gestützt, daß nach den Hitzdrahtschrieben die turbulenten und laminaren Partien so häufig miteinander abwechseln, daß bei der von *Sackmann* benutzten Rohrlänge niemals abwechselnd laminare und turbulente Strömung über die ganze Rohrlänge hergestellt wird. Im Bereich der größten Intermittenzzahl befinden sich bei einer Rohrlänge von 200 Durchmessern etwa 6 bis 7 turbulente Partien gleichzeitig im Rohr. Es ist undenkbar, daß die erzeugten Schwankungen des Rohrwiderstandes überhaupt nennenswerte Schwankungen der Durchflußmenge zur Folge haben können. Vor allem sind aber die unregelmäßige Folge der Wechsel und die Regelmäßigkeit der Pendelamplituden unter solcher Voraussetzung nicht miteinander vereinbar. Dies gibt Veranlassung, die Wurfweite eines ausfließenden Strahles näher zu untersuchen.

Man kann aus der Wurfweite des Strahles einer aus einem Rohr fließenden Flüssigkeit durchaus auf die Durchflußgeschwindigkeit U im Rohr schließen; es sind aber mehrere Nebeneinflüsse dabei zu berücksichtigen. Insbesondere ist die sich unter der Wirkung der Reibung an der Rohrwand einstellende Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt von Bedeutung. Nach dem Verlassen des Rohres fällt die Wandreibung fort, und die Flüssigkeit hat unter der Wirkung von Zähigkeit bezw. Turbulenz und Kohäsion die Tendenz sich gleichmäßig über den Querschnitt zu verteilen. Beim Übergang zu dieser gleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung bleibt die in der Zeiteinheit austretende Menge $\dot{M}$ und der durch die Fläche A der Kontrollfläche, Abb. 16, tretende Impuls

$$J = 2\pi\varrho\int_0^R u^2\, r\, dr \tag{17}$$

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 267.

erhalten. Aus dem Impuls durch die Fläche B

$$J = v_s \dot{M} \tag{18}$$

ergibt sich die für die Wurfweite des Strahles maßgebende Geschwindigkeit v_s zu

$$v_s = \frac{J}{\dot{M}} = 2\,U \int_0^1 \left(\frac{u}{U}\right)^2 \frac{r}{R}\, d\left(\frac{r}{R}\right). \tag{19}$$

Für das Parabelprofil der laminaren Rohrströmung ergibt sich hiernach $v_s = \frac{4}{3}\,U$, während bei turbulenter Strömung v_s praktisch gleich U ist ($v_s \sim 1{,}02\,U$).

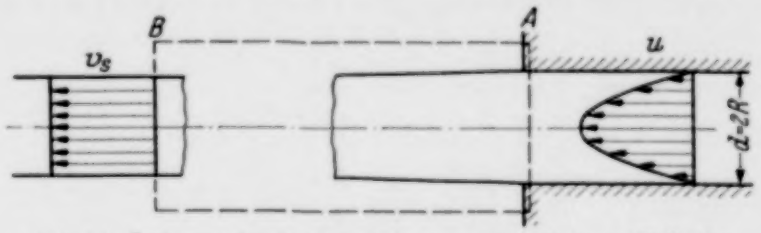

Abb. 16. Änderung der Geschwindigkeitsverteilung beim ausfließenden Wasserstrahl.

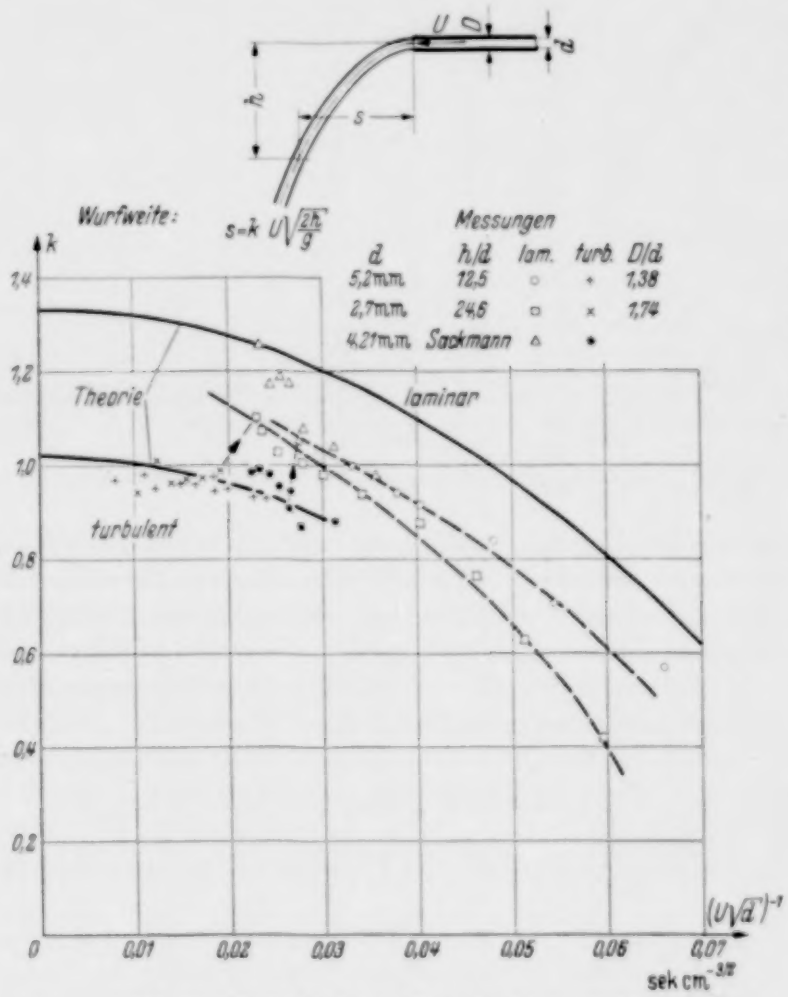

Abb. 17. Wurfweite des ausfließenden Wasserstrahles.

Bei den Abmessungen und Geschwindigkeiten, wie sie bei den in Frage stehenden Versuchen mit Wasser vorkommen, spielen auch die Kapillarspannungen eine nicht zu übersehene Rolle. Für eine Überschlagsrechnung wird einfach die an der Rohrmündung auf den Strahl ausgeübte Kraft K von dem Impuls nach (18) abgezogen. Dies ist streng nur für sehr große Fallhöhe h zulässig. Zur Abschätzung von K selbst wird angenommen, daß der Durchmesser des Strahles an der Mündung gleich dem Innendurchmesser d des Rohres ist und sich mit dem Abstand von der Mündung nicht ändert. Die Kapillarspannungen in axialer Richtung geben die Kraft $C\pi d$, wobei C die Kapillarkonstante ist. Durch die Kapillarspannungen in Umfangsrichtung steht die Flüssigkeit im Strahl unter dem Überdruck $p_ü = 2\,C/d$: die sich hierdurch ergebende Kraft $p_ü \pi d^2/4$ muß von der Kraft der axialen Spannungen abgezogen werden. Somit ist die Kapillarkraft an der Mündung

$$K = \frac{C\pi d}{2}. \tag{20}$$

Die einfache, aus dem Fallgesetz folgende Beziehung für die Wurfweite des Strahles läßt sich nun benutzen, wenn die genannten Einflüsse durch einen Faktor k berücksichtigt werden. Für die Wurfweite s ergibt sich dann

$$s = k\,U\sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{21}$$

wobei h die Fallhöhe und g die Erdbeschleunigung ist. Nach den gemachten Abschätzungen ergibt sich für den Faktor k

$$k = \frac{v_s}{U} - \frac{2\,C}{\varrho\,U^2 d}. \tag{22}$$

Die Größe k wird weiter beeinflußt durch die Lauflänge, die zur Umwandlung in die gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung nach dem Austritt erforderlich ist, durch die Wirkung der Erdanziehung auf die Geschwindigkeitsverteilung kurz vor dem Austritt und durch die Reibung des Strahles mit der umgebenden Luft.

Zur Nachprüfung der Überlegungen wurden einige Versuche durchgeführt. Die hieraus errechneten Werte des Faktors k sind auf Abb. 17 über $(U\sqrt{d})^{-1}$ aufgetragen. Zum Vergleich wurden die theoretischen Werte nach (22) mit eingezeichnet, denen die Kapillarkonstante $C = 74 \times 10^{-2}$ g/cm zugrunde liegt. Die Meßergebnisse bei turbulenter Strömung entsprechen sehr gut der Theorie; dagegen ergaben sich bei laminarer Strömung kleinere k-Werte als nach (22). Die wesentliche Ursache ist, daß die Annahmen für die Abschätzung der Kapillarkräfte an der Mündung zu grob sind. Abb. 18 zeigt die Form des Strahles an der Mündung. Die Kapillarspannungen greifen am Außendurchmesser D an; unter dem Einfluß der Erdbeschleunigung tritt zudem eine unsymmetrische Verformung auf. Für den vorliegenden Zusammenhang ist aber das Wichtigste die tatsächlich beobachtete Zunahme von k beim Übergang von turbulenter zu laminarer Strömung.

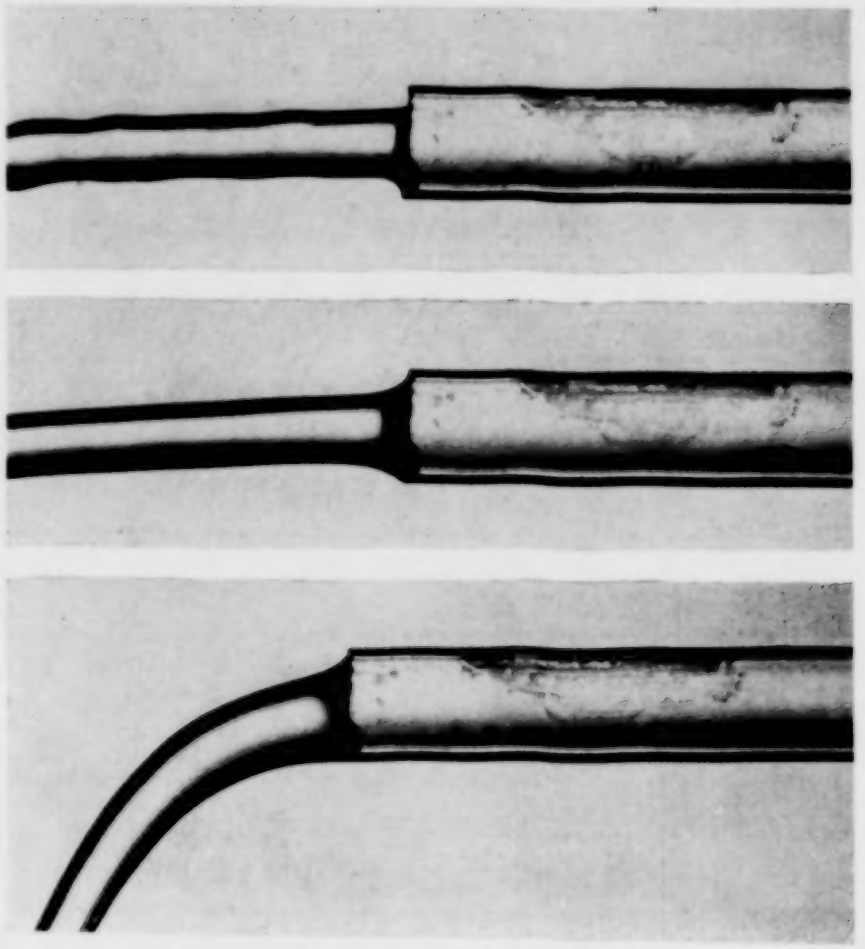

Abb. 18. Form des ausfließenden Wasserstrahles an der Mündung. Vergrößerung 2,5:1.
a) Turbulenter Strahl $(U\sqrt{d})^{-1} = 0{,}012$ (sekcm$^{-3/2}$);
b) Laminarer Strahl $(U\sqrt{d})^{-1} = 0{,}015$ (sekcm$^{-3/2}$);
c) Laminarer Strahl $(U\sqrt{d})^{-1} = 0{,}052$ (sekcm$^{-3/2}$).

Aus diesem Ergebnis ist zu folgern, daß die Pendelbewegungen des Ausflußstrahles bei intermittierend auftretender, turbulenter Rohrströmung keineswegs unbedingt zeitliche Schwankungen der Durchflußgeschwindigkeit U bedeuten müssen. Unter der Annahme, daß bei den Versuchen von *Sackmann* keine Schwankungen von U auftraten, entspricht das Verhältnis der dort ermittelten Geschwindigkeiten der turbulenten bzw. laminaren Partien zur Durchflußgeschwindigkeit dem Faktor k in (21). Die so aus der Arbeit *Sackmanns* ermittelten k-Werte wurden in Abb. 17 mit eingetragen und entsprechen im wesentlichen den übrigen Ergebnissen. Hiernach scheint es, daß auch bei den Versuchen von *Sackmann* keine Schwankungen der Durchflußmenge auftraten. Die Pendelungen des Strahles werden durch die unterschiedliche Größe des Impulses der Geschwindigkeitsverteilungen verursacht. Mit dieser Feststellung ist dann der Widerspruch mit den hier mitgeteilten Versuchen aufgeklärt.

7. Ausflußversuche. Die Staudruckmessungen gaben den Hinweis, daß nach einer Lauflänge von einigen hundert Rohrdurchmessern noch kein stationärer Endzustand erreicht ist. Dies legt die Vermutung nahe, daß die Änderung des Strömungszustandes mit der Rohrlänge ein sehr wesentliches Merkmal ist, das für die Mechanik dieser Strömung vielleicht entscheidend ist. Daher schien es wünschenswert, zur Klärung dieser Frage weiteres Versuchsmaterial zu beschaffen.

Nachdem im vorigen Abschnitt klargestellt worden war, daß die Pendelungen des aus einem Rohr ausfließenden Wasserstrahles durch die unterschiedlichen Geschwindigkeitsverteilungen bei turbulenter und laminarer Strömung verursacht werden, bietet sich die Möglichkeit, durch getrenntes Auffangen der turbulent und laminar ausströmenden Wassermenge und durch Zählen der Pendelbewegungen die für die Kennzeichnung der Struktur der Strömung wesentlichen Größen des Intermittenzfaktors γ und der Intermittenzzahl $\bar{n}$ auf verhältnismäßig einfache Weise zu ermitteln. Das anfänglich etwa 1,50 m lange Versuchsrohr von ungefähr 3 mm Innendurchmesser wurde nach jeder Versuchsreihe um ein Stück verkürzt. Auf diese Weise wurde ein Überblick über die Veränderung von und $\bar{n}$ mit der Lauflänge x der Strömung erhalten. Die Ergeb-

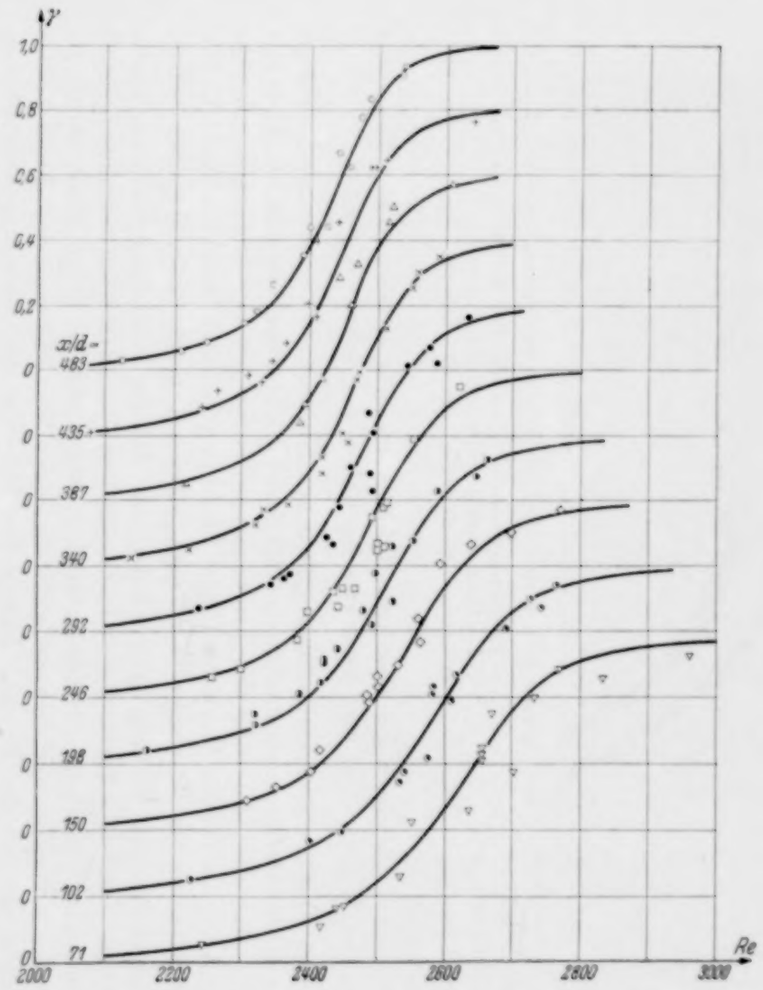

Abb. 19. Intermittenzfaktor nach Ausflußversuchen als Funktion der *Reynolds*zahl und der Lauflänge. Rohreinlauf entsprechend Nr. 1 von Abb. 2.

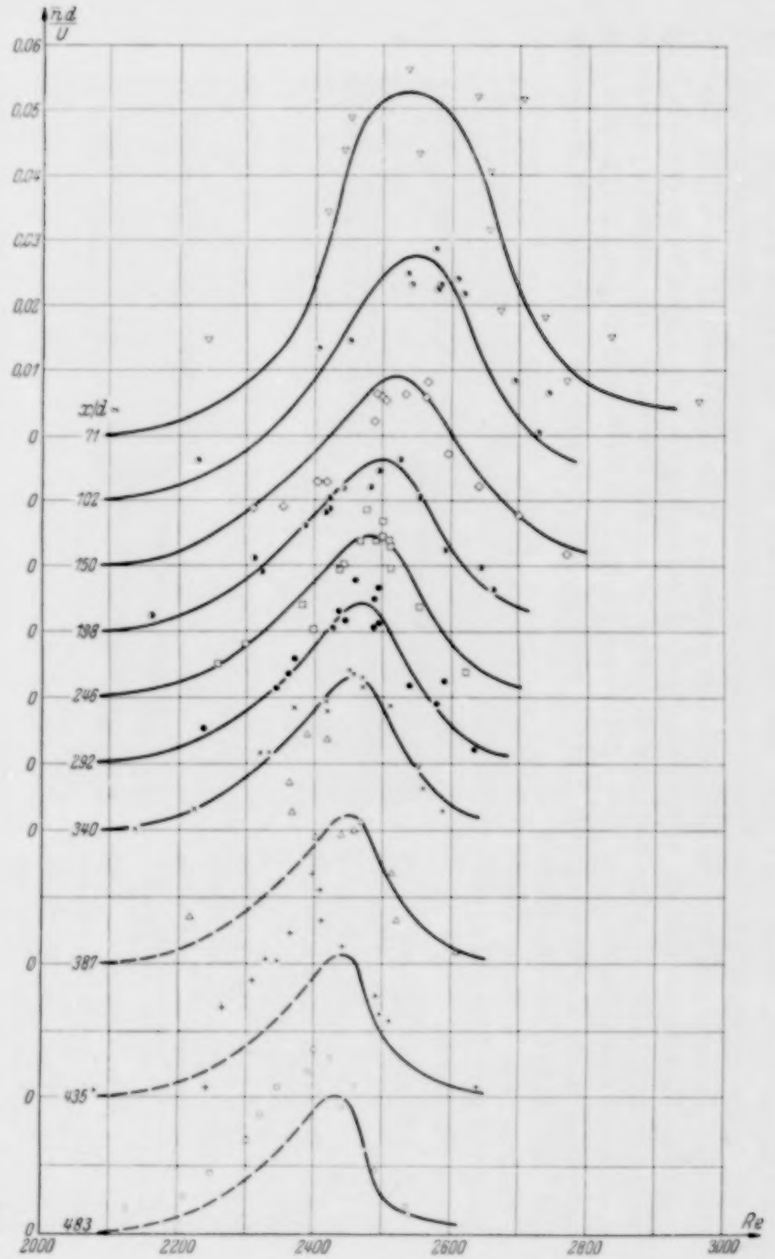

Abb. 20. Dimensionslose Intermittenzzahl nach Ausflußversuchen als Funktion der *Reynolds*zahl und der Lauflänge. Rohreinlauf entsprechend Nr. 1 von Abb. 2.

nisse sind auf Abb. 19 und 20 über der *Reynolds*zahl dargestellt. Die Ordinaten-Nullpunkte wurden für die verschiedenen x/d-Werte verschoben, um ein Überdecken der Meßpunkte der verschiedenen Versuchsreihen zu vermeiden. Durch die Meßpunkte wurden geglättete Kurven gelegt. Die Ergebnisse der drei zuerst durchgeführten Meßreihen (für x/d = 483, 435 und 387) sind hinsichtlich der Intermittenzzahl teilweise fehlerhaft[1]. Der mutmaßliche Verlauf in dem fraglichen Gebiet wurde in Abb. 20 und ebenso in den weiteren hieraus hergeleiteten Abbildungen gestrichelt gekennzeichnet.

Die geglätteten Kurven der Abb. 19 und 20 sind unter Vermeidung der Koordinaten Nullpunktsverschiebung noch einmal in Abb. 21 und 22 aufgetragen. Das Ergebnis zeigt, daß über

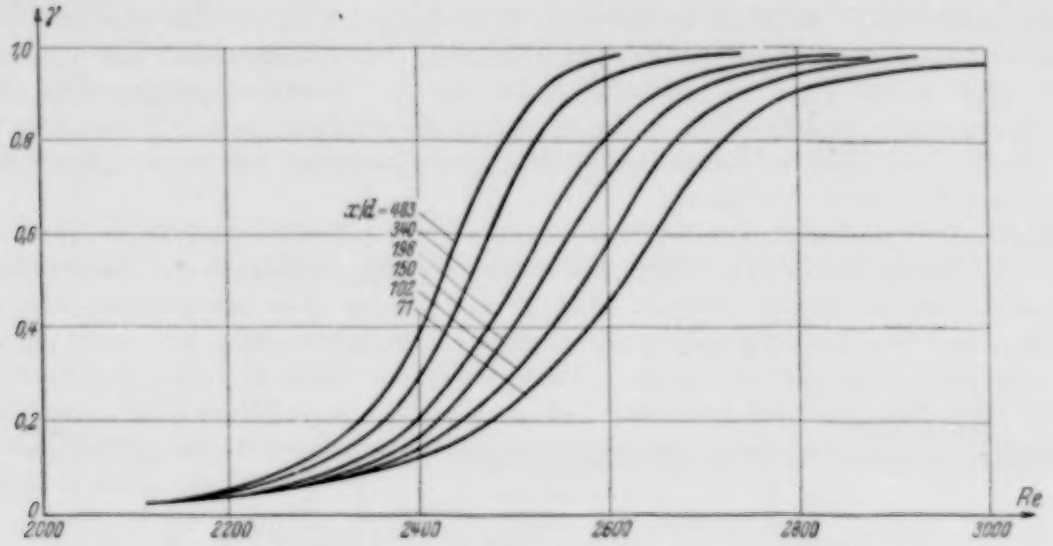

Abb. 21. Intermittenzfaktor als Funktion der *Reynolds*zahl und der Lauflänge. Geglättete Kurven von Abb. 19.

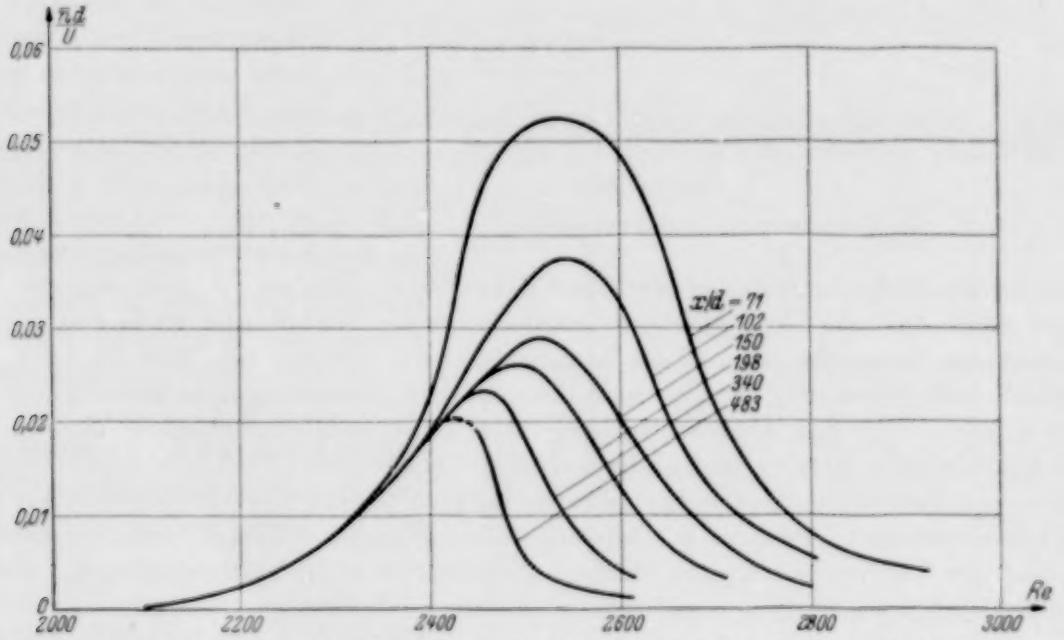

Abb. 22. Dimensionslose Intermittenzzahl als Funktion der *Reynolds*zahl und der Lauflänge. Geglättete Kurven von Abb. 20.

den ganzen Bereich der untersuchten Rohrlängen bis zu 500 Durchmessern eine stetige Änderung der Strömungsstruktur festzustellen ist. Der Bereich von *Reynolds*zahlen, in welchem intermittierende Strömung auftritt, wird mit der Rohrlänge immer schmaler und verschiebt sich zu kleineren Werten von *Re*. Die Intermittenzzahl nimmt mit der Rohrlänge ab.

Quantitativ stimmen die Ergebnisse nicht genau mit der Auswertungen der Hitzdrahtschriebe überein, obwohl am Einlauf auch eine Ringblende gemäß Nr. 1 von Abb. 2 angebracht

[1] Infolge unzulänglicher Lagerung des Versuchsrohres waren Schwingungen möglich, die ein vorzeitiges Zerfallen des laminaren Strahles unter der Wirkung der Kapillarkräfte zur Folge hatten. Die Zähleinrichtung reagierte aber nicht nur auf die Wechsel zwischen laminarer und turbulenter Strömung, sondern sprach auch auf einzelne Tropfen an. Daher ist die gemessene Intermittenzzahl bei diesen Reihen zu groß, allerdings nur in den Bereichen, in denen laminare Partien von nicht zu kleiner Länge auftraten. Die Ursache wurde zu spät erkannt; eine Wiederholung der Versuche war nicht möglich.

war. Die Bedingungen der Zuströmung zur Blende sind allerdings in beiden Fällen verschieden; darin mag ein Grund für die unterschiedlichen Ergebnisse liegen. Ein weiterer Grund kann in der Methode liegen: Die Abgrenzung zwischen turbulenten und laminaren Parten ist bei beiden Methoden bis zu einem gewissen Grade willkürlich festgelegt worden. Hinsichtlich der grundsätzlichen Schlußfolgerungen sind diese Unterschiede jedoch ohne Bedeutung.

8. Überlegungen zu den Übergängen an den Turbulenzfronten. Aus der Tatsache, daß in der Versuchsanlage, Abb. 1, mit glattem Rohreinlauf bis zu sehr großen *Reynolds*zahlen laminare Strömung besteht, ist zu schließen, daß die bei kleineren *Reynolds*zahlen beobachtete Turbulenz ihren Ursprung ausschließlich im gestörten Rohreinlauf hat. Unter dieser Voraussetzung kann man das intermittierende Auftreten turbulenter Strömung nur so deuten, daß Partien laminarer und turbulenter Strömung durch das Rohr hintereinander herfließen. Da mit den angewandten Versuchsmethoden keine direkten Anhaltspunkte für die Fortbewegungsgeschwindigkeit der turbulenten Partien gewonnen werden konnten, sollen die Strömungsverhältnisse an den Turbulenzfronten einer theoretischen Betrachtung unterzogen werden, um so aus den Versuchsbeobachtungen weitere Schlüsse zu ziehen.

Zur Klarstellung der Begriffe sei die Strömung von einem Beobachter betrachtet, der sich mit einer turbulenten Partie fortbewegt. Ihm stellt sich die Abgrenzung zur vorauslaufenden, laminaren Partie als „vordere Turbulenzfront" dar; dieser Übergang ist ein allmählicher, wie aus den Aufzeichnungen der Geschwindigkeiten hervorgeht. Die Begrenzung zur nachfolgenden, laminaren Partie erscheint dagegen als „hintere Turbulenzfront" und ist ziemlich scharf begrenzt.

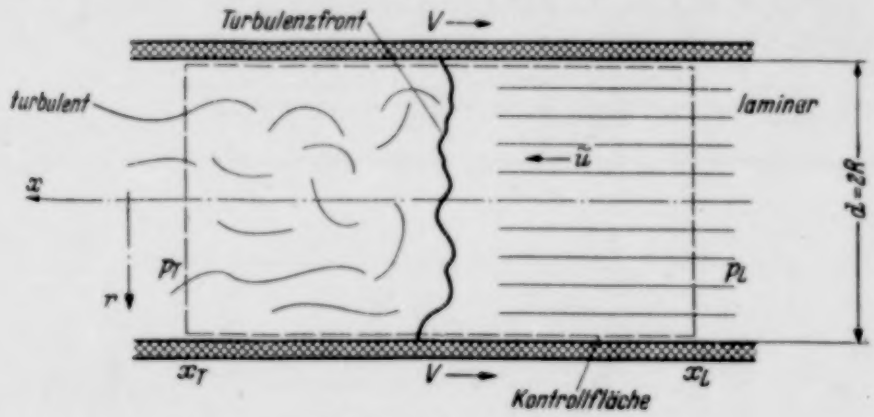

Abb. 23. Zum Übergang an den Turbulenzfronten.

Dem sich mit der Laufgeschwindigkeit V der Turbulenzfront bewegenden Beobachter erscheint die Strömung in der Umgebung der Front in zeitlichen Mittelwerten stationär, wenn V konstant ist. Deshalb werde vorübergehend ein Koordinaten-System eingeführt, in welchem sich das Rohr mit V nach rechts bewegt und die Turbulenzfront ruht, Abb. 23. Die Turbulenzfront werde von einer zylindrischen Kontrollfläche eingehüllt, deren Mantel dicht an die Rohrwandung grenzt, und deren Grenzflächen so weit von der Turbulenzfront entfernt sind, daß dort ausgebildete laminare bezw. turbulente Strömung herrscht. Die Größen am Ort der Grundfläche auf der laminaren Seite werden mit dem Index L, diejenigen auf der turbulenten Seite mit T gekennzeichnet. Die Strömungsgeschwindigkeit in diesem System $\tilde{u} = \bar{u}$ sei $-V$. Zur Unterscheidung der Laufgeschwindigkeiten der vorderen und hinteren Turbulenzfront werden die Indizes 1 und 2 eingeführt.

An der hinteren Turbulenzfront wirken auf die Kontrollfläche folgende Kräfte: An den Grundflächen greift der statische Druck p, der über die Grundfläche konstant vorausgesetzt wird, und der Impuls $\varrho\,\tilde{u}^2$ der Strömung an; am Mantel wirkt die Wandschubspannung τ_0. Damit ergibt sich das Kräftegleichgewicht in x-Richtung

$$\pi R^2 (p_L - p_T) + 2\pi\varrho \int_0^R (\tilde{u}_L^2 - \tilde{u}_T^2)\, r\, dr - 2\pi R \int_{x_L}^{x_T} \tau_0\, dx = 0\,. \tag{23}$$

Da nun

$$2\pi \int_0^R u_L\, r\, dr = 2\pi \int_0^R \bar{u}_T\, r\, dr = \pi R^2 U \tag{24}$$

ist, folgt aus (23) nach Wiedereinführung von $\bar{u}$ statt $\tilde{u}$ für das Impulsgleichgewicht die von der Laufgeschwindigkeit V_2 unabhängige Beziehung

$$p_T - p_L = \varrho U^2 \left[2 \int_0^1 \left(\frac{u_L}{U}\right)^2 \frac{r}{R}\, d\left(\frac{r}{R}\right) - 2 \int_0^1 \left(\frac{\bar{u}_T}{U}\right)^2 \frac{r}{R}\, d\left(\frac{r}{R}\right) \right] - \frac{2}{R} \int_{x_L}^{x_T} \tau_0\, dx\,. \tag{25}$$

Bei Anwendung auf die vordere Turbulenzfront sind lediglich die Indizes L und T zu vertauschen.

Da in der laminaren Strömung das Impulsintegral $2\int_0^1 \left(\frac{u}{U}\right)^2 \frac{r}{R}\, d\left(\frac{r}{R}\right)$ größer ($= 1{,}333$) als bei turbulenter Strömung ist ($\sim 1{,}02$), so entsteht beim Übergang jeweils eine Druckänderung. Vom Standpunkt des ruhenden Beobachters zeigt sich beim Ankommen einer turbulenten Partie eine Druckerhöhung, bei Ankunft einer laminaren Partie eine Drucksenkung.

Durch die beim Impulsgleichgewicht berücksichtigten äußeren Kräfte wird dem von der Kontrollfläche umschlossenen Volumen mechanische Energie zugeführt, die innerhalb dieses Volumens entweder in Wärme (Dissipation) oder in kinetische Energie turbulenter Geschwindigkeitsschwankungen umgewandelt wird. Diese in der Zeiteinheit umgewandelten Energien werden im folgenden mit $\dot{E}_d$ (Dissipation) und $\dot{E}_s$ (Schwankungen) beziehungsweise bezeichnet. Entsprechend Gl. (23) gilt jetzt

$$\pi R^2 (p_L - p_T)(U - V_2) + \pi \varrho \int_0^R (\tilde{u}_L^2 - \tilde{u}_T^2)\, r\, dr + 2\pi R V_2 \int_{x_L}^{x_T} \tau_0\, dx - \dot{E}_d - \dot{E}_s = 0\,. \quad (26)$$

Dies läßt sich mit (24) und Wiedereinführung von $\bar{u}$ umformen, wobei noch die Differenz der Drücke $p_T - p_L$ mit (25) eliminiert werden kann. Es ergibt sich dann eine Gleichung von der Form

$$\dot{E}_u + 2\pi R U \int_{x_L}^{x_T} \tau_0\, dx - \dot{E}_d - \dot{E}_s = 0\,. \quad (27)$$

Das erste Glied $\dot{E}_u$ stellt den Energiebetrag dar, der dem von der Kontrollfläche umschlossenen Volumen durch Änderung der Geschwindigkeitsverteilung zu- (oder ab-) geführt wird. Dieser Anteil beträgt

$$\dot{E}_u = \pi R^2 \frac{\varrho}{2} U^3 \left\{ 2\int_0^1 \left(\frac{u_L}{U}\right)^3 \frac{r}{R}\, d\left(\frac{r}{R}\right) - 2\int_0^1 \left(\frac{\bar{u}_T}{U}\right)^3 \frac{r}{R}\, d\left(\frac{r}{R}\right) - \left(2 + \frac{V_2}{U}\right)\left[2\int_0^1 \left(\frac{u_L}{U}\right)^2 \frac{r}{R}\, d\left(\frac{r}{R}\right) - 2\int_0^1 \left(\frac{\bar{u}_T}{U}\right)^2 \frac{r}{R}\, d\left(\frac{r}{R}\right)\right]\right\} \quad (28)$$

und ist von der Laufgeschwindigkeit V_2 der hinteren Turbulenzfront abhängig. Er läßt sich aus den bekannten Geschwindigkeitsverteilungen für ausgebildete turbulente und laminare Rohrströmung Abb. 9, errechnen und ist auf Abb. 24 dimensionslos über dem Geschwindigkeitsverhältnis V_2/U aufgetragen. $\dot{E}_u$ nimmt ab, wenn V_2/U steigt und wird negativ, wenn V_2 die Größe $1{,}05\,U$ übersteigt.

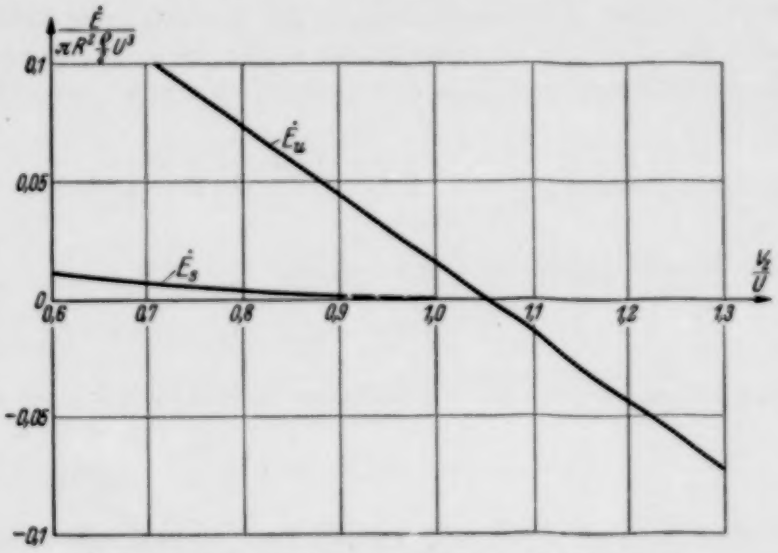

Abb. 24. Zur Energiebilanz an der hinteren Turbulenzfront.
$\dot{E}_u$ = Energiegewinn durch Umformung der zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsverteilung;
$\dot{E}_s$ = in Turbulenzschwankungen umgesetzte Energie.

Während $\dot{E}_u$ sowohl positiv als auch negativ sein kann, ist die durch das zweite Glied in (27) repräsentierte Arbeit der Wandschubspannung stets positiv. Auch $\dot{E}_d$ und $\dot{E}_s$ sind immer positiv, denn sowohl die Umwandlung von mechanischer Energie durch Reibung in Wärme als auch die Erzeugung von Energie ungeordneter Turbulenzbewegung aus der geordneten, laminaren Strömung sind nicht umkehrbar. Der in turbulente Geschwindigkeitsschwankungen verwandelte Energiebetrag ist

$$\dot{E}_s = \pi \varrho \int_0^R (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})(\bar{u}_T - V_2)\, r\, dr\,. \quad (29)$$

Eine Abschätzung dieser Größe ist unter Zugrundelegung der bei ausgebildeter Rohrströmung auftretenden Schwankungen möglich, die allerdings bei wesentlich größeren *Reynolds*zahlen gemessen wurden[1]. Diese Größe ist auf Abb. 24 ebenfalls dargestellt.

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 268.

Die Beträge der Wandschubspannungsarbeit und der Energiedissipation hängen von der Länge $x_T - x_L$ des Kontrollzylinders ab. Da bei ausgebildeter Rohrströmung, ob laminar oder turbulent, die beiden Beträge einander gleich sind, so hängt beim vorliegenden Problem ihre Differenz von der Länge der Strecke ab, innerhalb der sich die Umwandlung vollzieht. Ist diese Länge gleich Null, d. h. findet der Übergang plötzlich statt, so kann man sich die Kontrollfläche ganz dicht an die Turbulenzfront herangerückt denken, so daß die Beträge der Wandschubspannungsarbeit und der Dissipation vernachlässigbar klein werden. In diesem Fall müssen sich die durch Umwandlung der Geschwindigkeitsverteilung gewonnene Energie $\dot{E}_u$ und die in kinetische Energie turbulenter Schwankungen verwandelte Energie $\dot{E}_s$ das Gleichgewicht halten.

Auf Grund dieser Überlegungen ist ein stoßartiger Übergang an der rückwärtigen Turbulenzfront vom Standpunkt des Energiehaushaltes möglich, wenn die Laufgeschwindigkeit V_2 der Front kleiner oder zumindest nur unbedeutend größer als die Durchflußgeschwindigkeit U ist. Die Versuche zeigen, daß die Geschwindigkeitsverteilung sich wohl rasch, aber doch nicht schlagartig ändert. Auf der Strecke, in der die Umwandlung erfolgt, wird sicher die Dissipation größer als die Arbeit der Wandreibung sein, so daß hier noch ein Teil kinetischer Energie verbraucht wird. Trotzdem ist es nicht wahrscheinlich daß die Geschwindigkeit V_2 dieser Turbulenzfront sehr viel von der Durchflußgeschwindigkeit abweicht; ganz unwahrscheinlich ist es aber, daß V_2 wesentlich größer als U ist.

Für die Verhältnisse an der vorderen Turbulenzfront sind in (28) wieder die Indizes L und T zu vertauschen und V_1 für V_2 einzuführen. $\dot{E}_u$ wechselt also einfach das Vorzeichen. Wenn V_1 kleiner oder nur unwesentlich größer als U ist, werden $\dot{E}_u$ negativ und $\dot{E}_s = 0$. Der zur Umwandlung der Geschwindigkeitsverteilung erforderliche Antrieb kann dann nur aus der Arbeit der Wandreibung kommen. Das geht so vor sich, daß in x-Richtung die Geschwindigkeitsschwankungen abnehmen, die Verteilung der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit sich aber langsamer ändert. Damit gewinnt dann die Wandreibungsarbeit das Übergewicht über die Dissipation. So findet in x-Richtung eine stetige Umwandlung der Geschwindigkeitsverteilung statt, die energiemäßig keinesfalls auf einer infinitesimalen Länge des Rohres möglich ist. Der Vorgang ist offensichtlich dem der laminaren Einlaufströmung im Rohr verwandt. Dies bestätigen die Geschwindigkeitsschriebe sehr deutlich.

Dieser Übergang läßt sich unter vereinfachenden Rechnungs-Annahmen auch quantitativ verfolgen. Es wird dabei vorausgesetzt, die Umwandlung der Geschwindigkeitsverteilung werde durch plötzliches Verschwinden der turbulenten Scheinspannung $-\varrho\,\overline{u'v'}$ ausgelöst. Ferner wird der Druck p an jeder Stelle x über den Querschnitt konstant angenommen, so daß sich die Impulsgleichung (25) in differentiierter Form schreiben läßt

$$\varrho\, U^2 \frac{d}{dx}\left[2\int_0^1 \left(\frac{u}{U}\right)^2 \frac{r}{R}\, d\left(\frac{r}{R}\right)\right] = -\frac{dp}{dx} - \frac{2\,\tau_0}{R}\,. \tag{30}$$

Die Wandschubspannung ist dabei

$$\tau_0 = -\nu\,\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R}. \tag{31}$$

Außerdem wird für die Verhältnisse in Rohrmitte noch die *Navier-Stokes*sche Bewegungsgleichung

$$\varrho\,(u_m - V_1)\frac{\partial u_m}{\partial x} = -\frac{dp}{dx} + 2\,\nu\,\varrho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)_{r=0} \tag{32}$$

hinzugenommen, mit deren Hilfe der Druckgradient dp/dx in (30) eliminiert werden kann. Die Integration der so entstehenden, gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung liefert die Lösung des Problems. Für die Geschwindigkeitsverteilung wird angenommen, daß sie sich im Übergangsgebiet aus den Verteilungen der ausgebildeten laminaren und turbulenten Strömung linear superponieren läßt:

$$u = \alpha\, u_L + (1-\alpha)\,\bar{u}_T\,. \tag{33}$$

Die Ergebnisse dieser Rechnungen wurden umgerechnet auf das rohrfeste Koordinatensystem. Sie repräsentieren dann einen zeitlich verlaufenden Vorgang (s. Abb. 25), und sind somit mit den Hitzdrahtschrieben unmittelbar vergleichbar. Die große Ähnlichkeit dieser Darstellung mit den Geschwindigkeitsschrieben spricht für die Richtigkeit der angestellten Überlegungen. Der Abb. 25 ist noch das Ergebnis eines typischen Geschwindigkeitsschriebes beigegeben. Diesem

Vergleich nach zu urteilen, dürfte die Laufgeschwindigkeit V_1 der vorderen Turbulenzfront sicher auch nicht viel von U abweichen.

Die hier gezogenen Schlüsse gipfeln darin, daß die experimentell beobachtete Form der Übergänge an den Turbulenzfronten vom Standpunkt des Energiehaushaltes Laufgeschwindigkeiten der Turbulenzfronten bedingen, die mit der Durchflußgeschwindigkeit U der Größenordnung nach übereinstimmen. Das an einem festen Ort des Rohres beobachtete intermittierende Auftreten turbulenter Strömung entsteht dadurch, daß abwechselnd Partien turbulenter und laminarer Strömung durch das Rohr wandern.

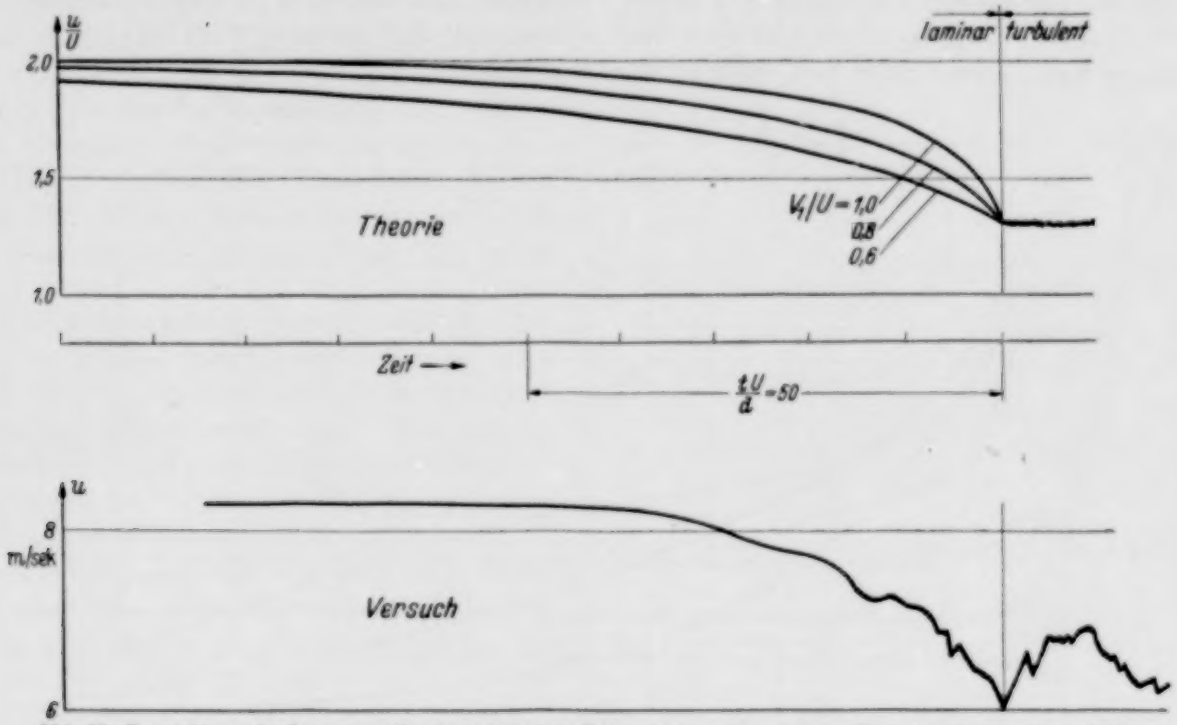

Abb. 25. Entwicklung der laminaren Geschwindigkeit in Rohrmitte an der vorderen Turbulenzfront. $Re = 2550$.

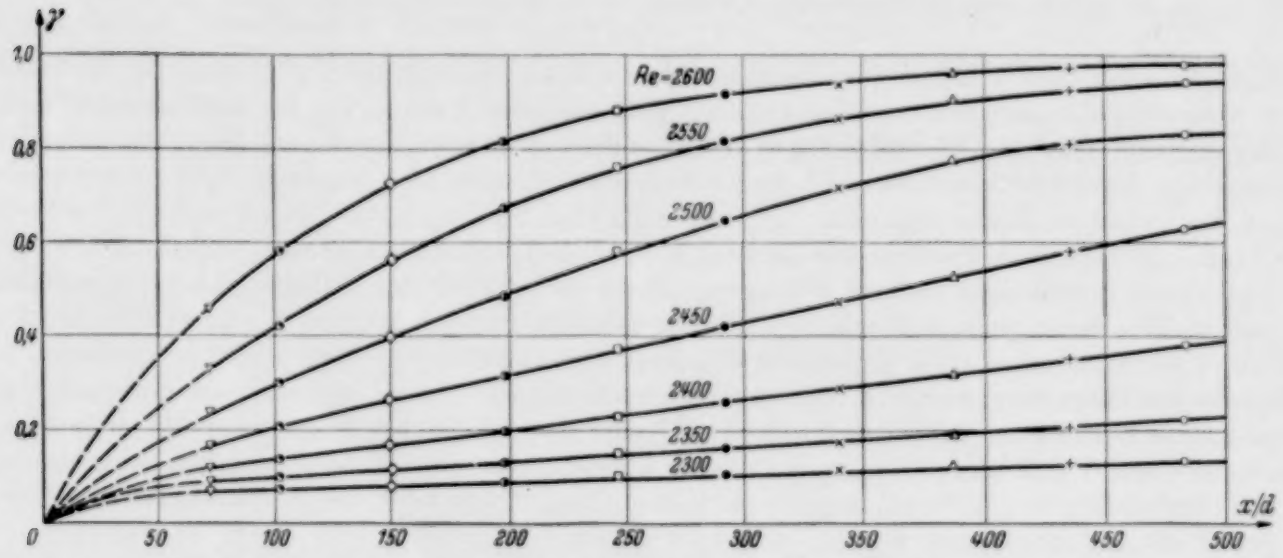

Abb. 26. Intermittenzfaktor als Funktion der Lauflänge. Nach geglätteten Kurven von Abb. 19.

9. Zusammenfassende Diskussion der Ergebnisse. Aus den mitgeteilten Untersuchungen geht hervor, daß in der Nähe der kritischen *Reynolds*zahl abwechselnd turbulente und laminare Partien bei zeitlich konstanter Durchflußmenge durch das Rohr hintereinander herströmen. Dabei bildet sich über den Querschnitt jeweils die der ausgebildeten turbulenten bzw. laminaren Strömung entsprechende Geschwindigkeitsverteilung aus. Die Verteilung hinsichtlich der Längen dieser Partien ist unregelmäßig. Bei der bisher im Schrifttum vertretenen Ansicht sind zeitliche Änderungen der Durchflußmenge die entscheidende Ursache für das intermittierende Auftreten turbulenter Strömung im Rohr[1]. Da bei den hier besprochenen Versuchen diese Durchfluß-

[1] Siehe Fußnote 3 von S. 258 und Fußnote 1 von S. 267.

mengenänderungen ausgeschlossen waren, ergibt sich, daß die eingangs erwähnte Erklärung nicht zutrifft.

Über das wirkliche Wesen dieser Strömung geben am besten die bei verschiedener Rohrlänge versuchsmäßig bestimmten Werte des Intermittenzfaktors γ und der Intermittenzzahl $\bar{n}$ Aufschluß. Es handelt sich um die sukzessive Entwicklung voll ausgebildeter turbulenter Strömung. Dies wird deutlich, wenn man den Intermittenzfaktor γ über der Lauflänge x für konstante Werte der *Reynolds*zahl aufträgt, Abb. 26. Diese Darstellung wurde aus Abb. 19 abgeleitet, wobei für γ die Werte der geglätteten Kurven genommen wurden. Der Intermittenzfaktor steigt stetig mit der Lauflänge an, bis er den Wert 1 erreicht, d. h. bis voll turbulente Strömung etabliert ist. Dieser Vorgang erstreckt sich über sehr große Rohrlängen, die für kleine *Reynolds*zahlen sogar nach Tausenden von Durchmessern zählen.

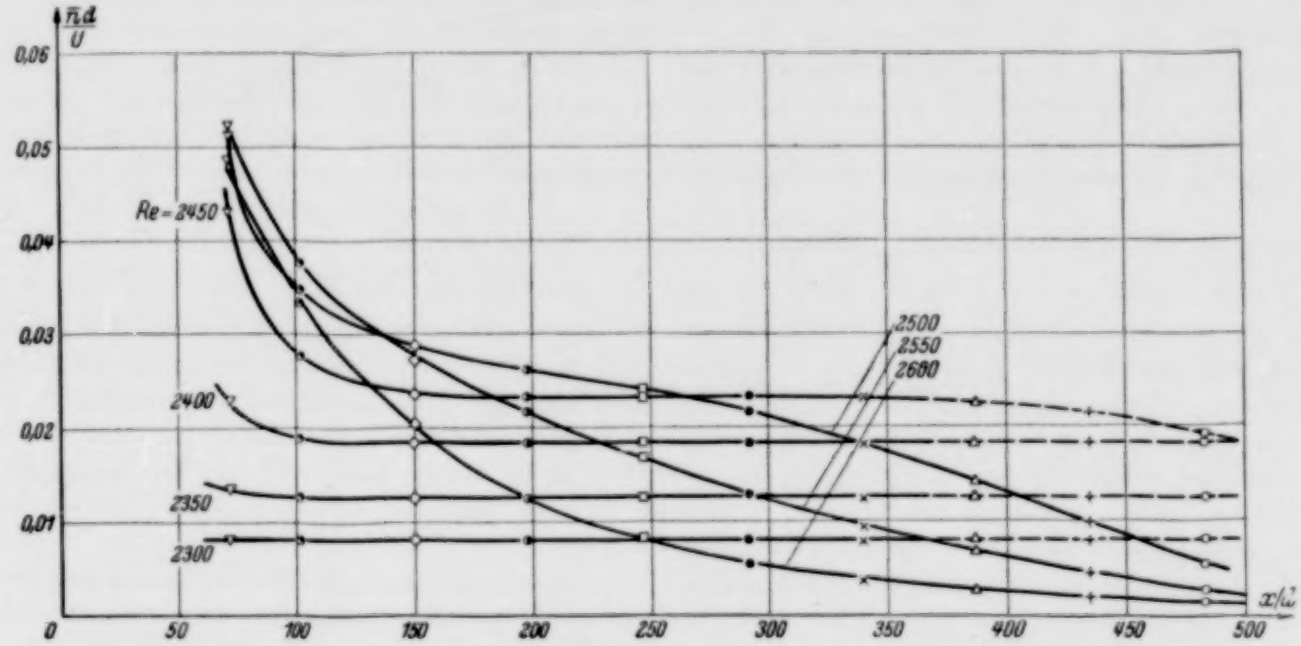

Abb. 27. Dimensionslose Intermittenzzahl als Funktion der Lauflänge. Nach geglätteten Kurven von Abb. 20.

Abb. 27 zeigt den Verlauf der dimensionslosen Intermittenzzahl $\bar{n}\,d/U$ über der Rohrlänge, der von den geglätteten Kurven der Abb. 20 umgezeichnet wurde. Die Intermittenzzahl nimmt im allgemeinen mit der Rohrlänge ab. Physikalisch bedeutet das Anwachsen von γ und das gleichzeitige Abnehmen von $\bar{n}$, daß die turbulenten Partien sich ausbreiten; sie wachsen und zehren die zwischen ihnen liegenden laminaren Partien sozusagen auf. Nach und nach schließen sich so die turbulenten Partien zusammen, so daß dadurch die Intermittenzzahl abnimmt.

Den unterschiedlichen Verlauf der Intermittenzzahl $\bar{n}$ über der Rohrlänge bei verschiedenen *Reynolds*zahlen kann man sich erklären, wenn man sich aus den Werten des Intermittenzfaktors und der Intermittenzzahl die durchschnittlichen Vorbeiströmzeiten der Partien errechnet. Der Kehrwert der Intermittenzzahl $\bar{n}$ stellt die durchschnittliche Dauer $\bar{t}$ vom Beginn einer laminaren Partie bis zu Beginn der nächsten laminaren Partie dar. Auf Abb. 28 ist diese Dauer in dimensionsloser Form $\bar{t}\,U/d$ über der *Reynolds*zahl aufgetragen, wie sie sich aus den Auszählungen der Hitzdrahtschriebe, Abb. 11, ergibt. Außerdem kann man auch die durchschnittliche Durchgangszeit einer turbulenten Partie ermitteln zu

$$\frac{\bar{t}_T\,U}{d} = \frac{U}{\bar{n}\,d}\,\gamma\,. \tag{34}$$

Auch dieser Wert ist auf Abb. 28 mit eingezeichnet. Die Differenz zwischen den beiden Kurven entspricht der durchschnittlichen Dauer der laminaren Partien

$$\frac{\bar{t}_L\,U}{d} = \frac{U}{\bar{n}\,d}\,(1-\gamma)\,. \tag{35}$$

Die dimensionslose Dauer $\bar{t}\,U/d$ hat im vorliegenden Fall bei ungefähr $Re = 2500$ ein sehr ausgeprägtes Minimum; für größere und kleinere *Reynolds*zahlen geht $\bar{t}\,U/d$ sehr schnell gegen unendlich. Die durchschnittliche Dauer der turbulenten Partien sind bei kleinen *Reynolds*zahlen klein und steigen mit Re sehr rasch an. Die durchschnittliche Dauer der laminaren Partien ist

bei kleinen *Reynolds*zahlen groß und nimmt ab, wenn *Re* wächst. Unter der Voraussetzung, daß die Laufgeschwindigkeiten V der Turbulenzfronten etwa gleich der mittleren Durchflußgeschwindigkeit U sind, stellen die Größen $\overline{t}_T\, U/d$ und $\overline{t}_L U/d$ die durchschnittlichen Längen der turbulenten bzw. laminaren Partien als Vielfaches des Rohrdurchmessers dar.

Da die Abnahme der Intermittenzzahl durch Zusammenschmelzen der turbulenten Partien entsteht, ist die Änderung von $\overline{n}$ immer dann groß, wenn die laminaren Partien im Durchschnitt kurz sind. Das ist der Fall, wenn der Intermittenzfaktor γ groß ist, also bei den größeren *Reynolds*zahlen. Sind die laminaren Partien im Durchschnitt dagegen lang, wie es bei den kleineren *Reynolds*zahlen ist, so verschmelzen nur selten zwei turbulente Partien miteinander. Daher ändert sich $\overline{n}$ dann sehr wenig oder gar nicht, wie aus Abb. 27 hervorgeht.

Aus dem Anwachsen von γ und der Abnahme von $\overline{n}$ kann man quantitative Anhaltspunkte für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der turbulenten Partien gewinnen. Ausbreitung einer turbulenten Partie heißt, daß die Laufgeschwindigkeit V_1 (bezogen auf das ruhende System) ihrer vorderen Front größer als die Laufgeschwindigkeit V_2 der hinteren Front ist. Passiert eine turbulente Partie von der Dauer t_T eine Stelle x des Rohres, so ist ihre Dauer an der Stelle $x + dx$

$$t_T + dt_T = t_T + \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) dx\,. \qquad (36)$$

Da nun in der Zeiteinheit n Partien vorbeiströmen, so wird die Zunahme des Intermittenzfaktors

$$d\gamma = \overline{\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)}\, n\, dx\,. \qquad (37)$$

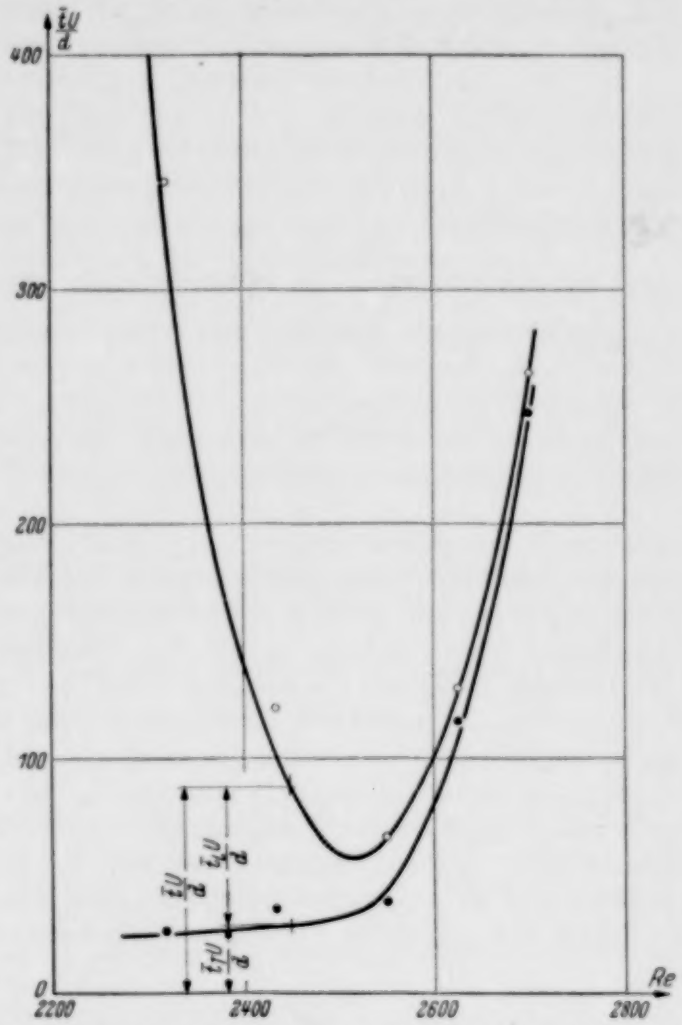

Abb. 28. Durchschnittliche Dauer der turbulenten und laminaren Partien und Gesamtdauer einer »vollen Periode« nach Hitzdrahtschrieben als Funktion der *Reynolds*zahl. Rohreinlauf Nr. 1. Lauflänge $x/d = 322$.

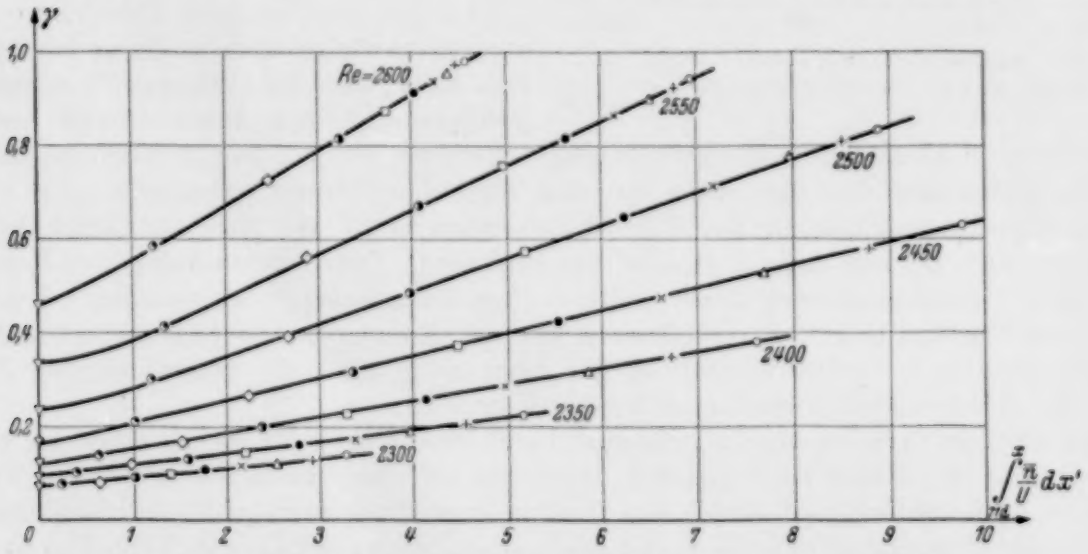

Abb. 29. Zur Ermittlung der Ausbreitungsgeschwindigkeit der turbulenten Partien.

Daraus folgt für den Zusammenhang zwischen Intermittenzfaktor und Lauflänge x die Beziehung

$$\gamma = \gamma_0 + \int_0^x \overline{\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)}\, n\, dx'\,. \qquad (38)$$

Hierbei stellt γ_0 formal eine Integrationskonstante dar. Es liegt nun die Vermutung nahe, daß ab einer gewissen Entfernung vom Einlauf, die von der Größenordnung der Einlauflänge der laminaren Rohrströmung sein mag, die durchschnittlichen Laufgeschwindigkeiten $\overline{V}$ von der Lauflänge x unabhängig sind. Wenn man noch annimmt, daß die statistischen Korrelationen zwischen V_1, V_2 und n vernachlässigbar sind, so läßt sich der Geschwindigkeitsfaktor in (38) vor das Integralzeichen setzen:

$$\gamma = \gamma_0 + \left(\frac{1}{\overline{V}_2} - \frac{1}{\overline{V}_1}\right) \int_0^x \overline{n}\, dx' . \tag{39}$$

Auf Grund dieser Überlegungen wurde auf Abb. 29 der Intermittenzfaktor über dem Integral $\int \frac{\overline{n}}{U}\, dx$ aufgetragen. Die Ergebnisse für konstante *Reynolds*zahlen lassen sich für $x/d > 100$ als gerade Linien darstellen. Die Laufgeschwindigkeiten der Turbulenzfronten scheinen danach tatsächlich von der Lauflänge x unabhängig zu sein.

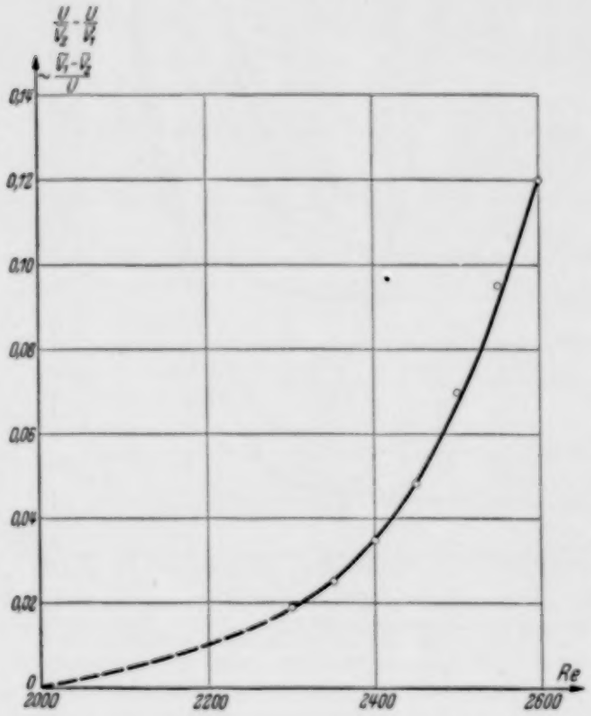

Abb. 30. Relative Ausbreitungsgeschwindigkeit der turbulenten Partien als Funktion der *Reynolds*zahl.

Aus der Neigung der Geraden kann man die relative Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$\frac{U}{\overline{V}_2} - \frac{U}{\overline{V}_1} = \frac{\overline{V}_1 - \overline{V}_2}{U} \frac{U^2}{\overline{V}_1 \overline{V}_2} \tag{40}$$

ermitteln. Diese ist in Abb. 30 als Funktion der *Reynolds*zahl dargestellt; sie darf wohl als eine Eigenschaft ausgebildeter Rohrströmung betrachtet werden, die von der speziellen Ausbildung des Rohreinlaufs unabhängig ist. Nach Abb. 30 fällt die Ausbreitungsgeschwindigkeit mit abnehmender *Reynolds*zahl sehr schnell ab. Die *Reynolds*zahl, bei der sie den Wert Null erreicht, muß als die wirkliche kritische *Reynolds*zahl angesehen werden, unterhalb derer sich die turbulente Rohrströmung nicht mehr aufbauen kann. Der genaue Wert dieser kritischen *Reynolds*zahl kann aus vorliegenden Versuchen nicht bestimmt werden; er mag etwa bei $Re = 2000$ liegen.

In dem untersuchten Bereich von *Reynolds*zahlen ist die relative Ausbreitungsgeschwindigkeit klein, d.h. die Differenz zwischen den Laufgeschwindigkeiten der vorderen und hinteren Turbulenzfront ist klein gegen die Durchflußgeschwindigkeit U. Die im vorigen Abschnitt auf Grund des Verhaltens der Strömung an den Turbulenzfronten ausgesprochene Vermutung, daß die Laufgeschwindigkeiten der Turbulenzfronten nicht viel von der Durchflußgeschwindigkeit abweichen, ist mit diesem Befund im Einklang. Zur Untersuchung der Laufgeschwindigkeiten der Turbulenzfronten sind weitere Forschungsarbeiten notwendig. Diese würden nicht nur zur Klarstellung der Verhältnisse bei der Rohrströmung beitragen, sondern lassen darüber hinaus eine wichtige Vertiefung der Kenntnisse über die grundlegenden Zusammenhänge bei der Ausbreitung turbulenter Strömungen erwarten.

Aus den Untersuchungen ergibt sich nun das folgende Bild für die Etablierung turbulenter Rohrströmung in der Nähe der kritischen *Reynolds*zahl: Durch die geometrischen Verhältnisse am Einlauf (und natürlich auch durch den Turbulenzgrad der zuströmenden Flüssigkeit) werden im Rohr einzelne Partien turbulenter Strömung erzeugt, die nach Länge und Häufigkeit statistisch unregelmäßig verteilt sind. Auf dieses Phänomen, über das schon *L. Schiller*[1] einige Beobachtungen mitgeteilt hat, soll hier nicht weiter eingegangen werden. Der Rohrströmung ist es dann selbst überlassen, aus dieser Anfangsverteilung den voll turbulenten Zustand aufzubauen. Die Partien turbulenter Strömung werden mit der Strömung fortgeführt; dabei wachsen sie

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 258.

mit einer von der *Reynolds*zahl abhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeit und schmelzen nach und nach zusammen, bis schließlich ein voll turbulenter Strömungszustand hergestellt ist. Diese Entwicklung kann sich über sehr große Rohrlängen erstrecken. Dieser Tatsache ist es zuzuschreiben, daß sich bei Messung zeitlicher Mittelwerte (Druckabfall, Geschwindigkeitsverteilung) der Wechsel von laminarer in turbulente Strömung stets als allmählicher Übergang zeigt, der sich über ein endliches Intervall von *Reynolds*zahlen erstreckt. Dies ist selbst dann der Fall, wenn gröbste Mittel zur Erzeugung turbulenter Strömung angewandt werden.

Es zeigt sich hier eine interessante Parallele zur Entstehung der turbulenten Grenzschicht an der Platte[1, 2]. Bei dieser beginnt die turbulente Strömung — ebenfalls statistisch unregelmäßig — an einzelnen Stellen. Die entstandenen „Turbulenzflecken" breiten sich aus, wobei sie mit der Strömung fortgetragen werden, und überdecken schließlich die ganze Fläche. Die Ausbreitung, die an der Platte zwei-dimensional vor sich geht, stellt sich im Rohr ein-dimensional dar.

Eine praktische Schlußfolgerung, die man für den Begriff der Übergangs-*Reynolds*zahl beim Rohr hieraus zu ziehen hat, ist, daß ein Zusammenhang zwischen Lauflänge des Rohres und der *Reynolds*zahl, bei der die Strömung voll turbulent ist, besteht. Diese Erkenntnis hat schon *Schiller* niedergelegt. Wenn man genaue Aussagen machen will, unter welchen Umständen in einem Rohr bei gegebenen Einlaufbedingungen turbulente Strömung zu erwarten ist, so genügt nicht die Angabe einer auf den Rohrdurchmesser bezogenen *Reynolds*zahl, sondern es muß auch eine Rohrlänge mit genannt werden.

Nach den vorliegenden Erkenntnissen möchte man bei der Entstehung turbulenter Strömung, sei es im Rohr, in der Grenzschicht eines umströmten Körpers oder sonst wie, drei Phasen unterscheiden. Die erste Phase ist die Entstehung anwachsender Wellen, der *Tollmien*schen Wellen — infolge in der ankommenden Strömung vorhandener Störungen, Schallwellen, Erschütterungen oder dergleichen —, oder die Ausbildung von Wirbelstraßen — bei nicht stromlinienförmigen Körpern —. In der zweiten Phase gehen diese Wellen oder diskreten Wirbel in örtlich begrenzten Gebieten in ungeordnete Strömung über, wie man sie unter dem Begriff Turbulenz versteht. In der letzten Phase breiten sich dann die Gebiete turbulenter Strömung aus, bis sie den ganzen, in Frage kommenden Raum ausfüllen. Die vorliegenden Untersuchungen lieferten für die Rohrströmung einen Beitrag zu der letzten Phase der Turbulenzentstehung. Eine Anzahl von Fragen blieb dabei offen; über andere konnten nur Vermutungen ausgesprochen werden. Es wäre eine lohnende Aufgabe, durch weitere Untersuchungen die verbliebenen Lücken zu schließen.

(Eingegangen am 25. Januar 1956.)

Anschrift des Verfassers: *J. Rotta* Göttingen, Bunsenstraße 10.

[1] *H. W. Emmons*, J. Aero. Sci. 18, (1951); S. 490.

[2] *G. B. Schubauer* und *P. S. Klebanoff*, Contributions on the mechanics of boundary-layer transition, NACA TN 3489 (1955).

Zur Berechnung der kritischen Geschwindigkeit der reibungs- und relaxationsfreien thermochemischen Gasströmung durch Rohr und Düse

Von H. Stümke

1. Einleitung. Bei der Auslegung von Strahltriebwerken interessieren u. a. folgende Fragen: Erstens, bei welcher Energiezufuhr bzw. bei welchem Querschnittsverhältnis des Diffusors thermische Verstopfung der Brennkammer eintritt[1,2], zweitens, bei welchem Querschnittsverhältnis der Feuerdüse isentropische Entspannung auf Überschall möglich ist[3]. Ganz ähnliche Fragestellungen kommen auch in der Theorie des ebenen Detonationsstoßes vor[4,5]. Im klassischen Fall eines Gases konstanter spezifischer Wärme tritt der kritische Zustand gerade bei örtlicher Schallgeschwindigkeit ein. Daß dieser Satz unter gewissen Voraussetzungen auch für die chemisch veränderliche Strömung gilt, ist für den Fall der Düsenströmung ohne Energiezufuhr wie für den Fall der Rohrströmung mit Energiezufuhr zwar bewiesen [4,6], jedoch scheint dies weniger bekannt zu sein. Wir wollen daher im folgenden die kritischen Geschwindigkeiten für diese beiden Fälle noch auf einem etwas anderen Wege direkt berechnen, ihre Übereinstimmung mit der örtlichen Schallgeschwindigkeit zeigen und schließlich die numerische Berechnung an einem Beispiel erläutern.

Unsere Annahmen sind: Reibungslosigkeit der Strömung, stationäre Verhältnisse, Anwendbarkeit der elementaren Stromfadentheorie und relaxationsfreie Einstellung der thermischen und chemischen Gleichgewichte.

Auf Grund der letzten Voraussetzung ist der thermodynamische Zustand — ebenso wie bei konstanter chemischer Zusammensetzung — durch jeweils zwei Größen völlig bestimmt. Für rein theoretische Betrachtungen eignen sich sehr gut der Druck und die Dichte als Zustandsvariablen, da man dann die Temperatur als Zustandsgröße ganz entbehren kann[5]. Da wir jedoch weiter unten eine spezielle kritische Geschwindigkeit numerisch berechnen wollen und die dafür benötigten Stoffgrößen im allgemeinen als Funktionen von Druck und Temperatur tabuliert vorliegen, wählen wir die letztgenannten Größen von Anfang an als Zustandsvariablen. Andererseits ist dieser Ansatz allgemein genug, um die im folgenden angewandte direkte Methode zur Berechnung kritischer Zustände bei beliebiger Wahl der Zustandsvariablen darzulegen.

Häufig wiederkehrende Symbole sind:

p = Druck; p als Index: $A_p \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial p}\right)_T$, Ausnahme: c_p, C_p, s. u.;

ϱ = Dichte;

T = Temperatur; T als Index: $A_T \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_p$;

R = allgemeine Gaskonstante $= 1{,}9865 \frac{\mathrm{cal}_{15}}{\mathrm{mol}_{\mathrm{Chem.\,Sk.}}\,^{\circ}\mathrm{K}} = 8314{,}4 \frac{\mathrm{g\,m^2}}{\mathrm{s^2\,mol}_{\mathrm{Chem.\,Sk.}}\,^{\circ}\mathrm{K}}$;

M = Molekulargewicht;

n = Konzentration im chemischen Gleichgewicht, als Molenbruch;

c_p, h, s = spezifische Wärme bei konstantem Druck, Gesamtenthalpie und Entropie pro Masseneinheit;

C_p, H, S = dieselben Größen pro Mol;

S^* = Entropie pro Mol beim Druck von 1 Atm.;

C = Molwärme des Gasgemisches bei konstantem Druck und konstanter Konzentration;

F = Rohr- bzw. Düsenquerschnitt;

w = Strömungsgeschwindigkeit;

---

[1] *E. Sänger*, Madras Institute of Technology 3 (1954) S. 91.

[2] *I. Sänger-Bredt*, Bemessungstafeln für Staustrahlantriebe. Bericht Nr. 4, Teil 1, des Forschungsinstitutes für Physik der Strahlantriebe e.V., Stuttgart (im Druck).

[3] *E. Sänger*, Schweizer Arch. angew. Wissensch. u. Technik, 16 (1950) S. 341 und S. 369.

[4] *K. Oswatitsch*, Gasdynamik, Wien 1952.

[5] *R. Becker*, Z. Physik 8 (1922) S. 321.

[6] *J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss* und *R. B. Bird*, Molecular theory of gases and liquids, New York 1954.

w_R = kritische Geschwindigkeit der Strömung im Rohr;
w_L = kritische Geschwindigkeit der Strömung in der Lavaldüse;
a = Schallgeschwindigkeit;
i = Index für eine chemische Komponente des Gasgemisches;
0 = Index für Verhältnisse im Anfangsquerschnitt;

2. Schallgeschwindigkeit. Die Schallgeschwindigkeit ist im allgemeinen frequenzabhängig. Wir betrachten zunächst adiabatische Zustandsänderungen, die so langsam erfolgen, daß man die Einstellung der thermischen und chemischen Gleichgewichte als verzögerungsfrei ansehen kann. Die Zustandsänderung erfolgt dann isentropisch:

$$s(T, p) = \text{konst.} \tag{1}$$

und ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit a) ist durch die Formel

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s \tag{2}$$

gegeben. In dieser Gleichung können wir auf Grund unserer obigen Annahmen die Dichte ϱ als Funktion von p und T allein ausdrücken:

$$\varrho = \varrho(p, T). \tag{3}$$

Ein zeitlich infinitesimal benachbarter Zustand eines Masseteilchens unterscheide sich vom Zustand T, p durch die Variationen dT, dp, $d\varrho$. Für diese gelten dann die beiden Differentialbeziehungen

$$s_p\, dp + s_T\, dT = 0 \tag{1}'$$

und

$$\varrho_p\, dp + \varrho_T\, dT - d\varrho = 0\,. \tag{3}'$$

Aus ihnen folgt unmittelbar für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a sehr langsamer Zustandsänderungen die Formel

$$a^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s = \frac{s_T}{\varrho_p\, s_T - \varrho_T\, s_p} \equiv \frac{p}{\varrho}\,\frac{s_T}{N_a}, \tag{4}$$

wobei zur Abkürzung

$$N_a \equiv \frac{p}{\varrho}\,(\varrho_p\, s_T - \varrho_T\, s_p)$$

gesetzt wird.

Die Gesamtenthalpie h des Gasgemischs möge nun so definiert sein, daß sie außer dem Produkt $p\,v$ noch die gesamte innere Energie einschließlich der latenten chemischen Energie enthält. Nach dem ersten und zweiten Hauptsatz der Wärmelehre ist dann bei reversibler Wärmezufuhr

$$dq_{rev.} = T\, ds = dh - \frac{1}{\varrho}\, dp\,. \tag{5}$$

Faßt man auch s und h als Funktionen von p und T auf, so folgen aus (5) sofort die beiden Beziehungen

$$T\, s_T = h_T\,, \tag{6}$$

$$T\, s_p = h_p - \frac{1}{\varrho}\,. \tag{7}$$

Durch Einsetzen derselben in (4) erhält man für die Schallgeschwindigkeit a sehr langsamer Zustandsänderungen noch die Darstellung:

$$a^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s = \frac{h_T}{\varrho_p\, h_T - \varrho_T \left(h_p - \dfrac{1}{\varrho}\right)}\,. \tag{8}$$

Bei schnelleren Zustandsänderungen, also z. B. bei gewöhnlichen Schallwellen mit höheren Frequenzen, kann der Fall eintreten, daß die Einstellung der thermischen Gleichgewichte noch relaxationsfrei erfolgt, während die trägeren chemischen Gleichgewichte nicht mehr realisiert werden; die chemische Zusammensetzung bleibt dann beim Durchgang der Schallwellen praktisch konstant. In einem solchen Frequenzbereich kann man die obigen Formeln (4) bzw. (8) unter Festhalten der Konzentrationen anwenden.

Es ist auch der Fall denkbar, daß die Einstellung der Dissoziationsgleichgewichte nur in Anwesenheit eines Katalysators vonstatten geht, und daß man diesen nach Belieben hinzufügen oder entfernen kann. In Abwesenheit des Katalysators müssen dann sogar bei sehr langsamen Zustandsänderungen die Konzentrationen in (4) bzw. (8) als konstant behandelt werden.

3. Kritische Geschwindigkeit in der Lavaldüse. In der Lavaldüse sind bei Abwesenheit von Wärmezufuhr, Reibung und Stoßverlusten nicht nur die Zustandsgleichung (3) und die Entropiegleichung (1) gewahrt, wobei sich jetzt die räumliche Koordinate x in Stromrichtung als natürlicher Parameter anbietet, sondern es gilt auch noch die Energiegleichung

$$\frac{w^2}{2} + h(T, p) = \text{konst.} \tag{9}$$

sowie die Kontinuitätsgleichung

$$F \varrho w = \text{konst.} \tag{10}$$

Im engsten Querschnitt der Düse erreicht die Stromdichte ein Maximum:

$$\varrho w = \max \qquad \text{für} \qquad F = F_{min} . \tag{11}$$

Im allgemeinen nehmen dort auch alle anderen Zustandsgrößen einen Extremwert an. Sofern dies nicht der Fall ist, pflegt man von einem „kritischen" Zustand zu sprechen[1]. Auf jeden Fall werden in einem Düsenquerschnitt, welcher der engsten Stelle infinitesimal benachbart ist, für die Variationen dp, dT, $d\varrho$ und dw außer den Gleichungen (1)′ und (3)′ noch die Beziehungen gelten

$$w\,dw + h_p\,dp + h_T\,dT = 0 , \tag{9}'$$

$$\varrho\,dw + w\,d\varrho = 0 . \tag{11}'$$

Die Gleichungen (1)′, (3)′, (9)′, (11)′ bilden ein System von vier linearen homogenen Gleichungen. Beim Vorliegen eines Extremfalles werden die Gleichungen durch identisch verschwindende Variationen erfüllt. Im kritischen Zustand dagegen muß die Determinante

$$\begin{vmatrix} w & h_p & h_T & 0 \\ \varrho & 0 & 0 & w \\ 0 & \varrho_p & \varrho_T & -1 \\ 0 & s_p & s_T & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{12a}$$

sein. Subtraktion der mit T multiplizierten vierten Zeile von der ersten Zeile und Addition der mit w multiplizierten dritten Zeile zur zweiten Zeile führt unter Beachtung der Gleichungen (6) und (7) zu der vereinfachten Form

$$\begin{vmatrix} w & \frac{1}{\varrho} & 0 \\ \varrho & w\varrho_p & w\varrho_T \\ 0 & s_p & s_T \end{vmatrix} = 0 , \tag{12b}$$

aus der sofort

$$w_L^2 = \frac{s_T}{\varrho_p s_T - \varrho_T s_p} \tag{12c}$$

folgt. In Verbindung mit (4) ergibt sich hiernach, daß unter den einleitend genannten Voraussetzungen die kritische Düsengeschwindigkeit w_L auch bei thermochemischer Gasströmung mit der Schallgeschwindigkeit für geringe Frequenzen übereinstimmt.

4. Kritische Geschwindigkeit im Rohr. Beim Durchströmen der Strecke x_A, x_B eines Rohres werde die pro Zeiteinheit eintretende Masse auf das $(1 + \mu)$-fache, der eintretende Gesamtimpuls auf das $(1 + \eta)$-fache und die eintretende Gesamtenergie auf das $(1 + \varepsilon)$-fache vergrößert. Dabei wollen wir μ, η und ε als unabhängig vom Endzustand in x voraussetzen. In der üblichen Behandlung der Rohrströmung wird meistens $\mu = \eta = \varepsilon = 0$ gesetzt. Am Anfang der Strecke oder nach erfolgter Massenzufuhr wird i. a. ein chemischer Nichtgleichgewichtszustand bestehen. Auf jeden Fall soll aber am Ende der Strecke thermochemisches Gleichgewicht erreicht sein.

[1] Siehe Fußnote 4, S. 282.

Man hat dann für die Zustände in Punkten $x_0 < x_A$ und $x > x_B$ außer der Zustandsgleichung (3) die Beziehungen

Energiegleichung:
$$\frac{w^2}{2} + h(T, p) = \left(\frac{w_0^2}{2} + h_0\right)(1 + \varepsilon)\,, \tag{13}$$

Impulsgleichung:
$$p + \varrho\, w^2 = (p_0 + \varrho_0\, w_0^2)\,(1 + \eta)\,, \tag{14}$$

Kontinuitätsgleichung:
$$\varrho\, w = \varrho_0\, w_0\,(1 + \mu)\,. \tag{15}$$

Die rechts stehenden Größen p_0, ϱ_0 usw. hängen im allgemeinen von mehreren Parametern ab. Wir nehmen jetzt für alle diese Parameter außer einem, der y heißen möge, konstante Werte an. Die Größen p_0, ϱ_0 usw. sind dann Funktionen von y.

Eliminiert man jetzt mittels der Zustandsgleichung (3) und der Kontinuitätsgleichung (15) die Größen w und ϱ aus der Energiegleichung (13) und der Impulsgleichung (14), so stellen die Energiegleichung (13) und die Impulsgleichung (14) in der p, T-Ebene je eine Schar von Kurven $f(p, T, y) = 0$ bzw. $g(p, T, y) = 0$ mit stetig sich drehender Tangente dar. Reelle Schnittpunkte zweier Kurven f und g mit gleichem Parameter y bedeuten mögliche Zustände im Punkt x. Der Grenzfall gegen die physikalisch nicht realisierbaren Zustände tritt offenbar dann ein, wenn sich die Kurven f und g berühren. Formuliert man diese Bedingung analytisch, so erhält man eine Beziehung zwischen der kritischen Geschwindigkeit w_R der Rohrströmung und den Zustandsvariablen p und T. Dies ist das übliche Verfahren, mit welchem man auch bei Annahme eines (p, ϱ)-Systems die kritischen Zustände zu bestimmen pflegt[1].

Man kann nun, ohne den mathematischen Gehalt der Herleitung zu ändern, den Beweisgang wesentlich abkürzen, indem man direkt bei konstantem y eine nichttriviale Lösung für die Differentiale der Zustandsgrößen sucht.

Zu den früheren Gleichungen (3)′, (9)′, (11)′ tritt dann noch die aus der Impulsgleichung folgende Relation

$$2\,\varrho\, w\, dw + dp + w^2\, d\varrho = 0\,. \tag{14}'$$

Als Parameter, nach dem die Differentiation ausgeführt wird, wird man bei dieser Deutung eine der Zustandsvariablen w, ϱ, p oder T nehmen. Eine nichttrivale Lösung des Problems kann nur dann bestehen, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} w & h_p & h_T & 0 \\ 2\,\varrho\, w & 1 & 0 & w^2 \\ 0 & \varrho_p & \varrho_T & -1 \\ \varrho & 0 & 0 & w \end{vmatrix} = 0 \tag{16 a}$$

ist. Subtraktion der mit w multiplizierten vierten Zeile von der zweiten Zeile und Addition der mit w multiplizierten dritten Zeile zur vierten Zeile führt zu der einfacheren Form

$$\begin{vmatrix} w & h_p & h_T \\ \varrho\, w & 1 & 0 \\ \varrho & w\,\varrho_p & w\,\varrho_T \end{vmatrix} = 0\,, \tag{16b}$$

aus der sich sofort

$$w_R^2 = \frac{h_T}{\varrho_p\, h_T - \varrho_T\left(h_p - \dfrac{1}{\varrho}\right)} \tag{16c}$$

ergibt. Ein Vergleich mit (8) zeigt, daß unter den oben genannten Voraussetzungen die kritische Geschwindigkeit w_R des Rohres auch bei dissoziierenden Gasen mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit a niederfrequenter Störungen übereinstimmt.

5. Spezielle thermochemische Ansätze. Für die Durchrechnung eines Zahlenbeispiels benötigen wir einen ausführlichen Ansatz für die Zustandsgleichung eines reagierenden Gasgemisches. Da hierüber noch wenig bekannt ist, setzen wir voraus: Die Temperatur sei so hoch bzw. der Druck so gering, daß die Zustandsgleichung der Einzelgase und des Gasgemischs in der

[1] Siehe Fußnoten 4 bis 6 auf S. 282

Form

$$\frac{p\,M}{\varrho\,T} = R\,, \tag{17}$$

angenommen werden kann.
Dabei wird

$$\varrho_p = \frac{\varrho}{p}\left(1 + \frac{p\,M_p}{M}\right), \qquad \varrho_T = \frac{-\varrho}{T}\left(1 - \frac{T\,M_T}{M}\right). \tag{17'}$$

Zwischen den Funktionen h, s einerseits und H, S andererseits bestehen dann die Beziehungen

$$h = \frac{H}{M}, \qquad s = \frac{S}{M}. \tag{18}$$

Hier ist[1]

$$M = \sum_i M_i\,n_i\,, \qquad n_i = \frac{p_i}{p}\,, \qquad \sum_i n_i = 1\,, \tag{19}$$

$$C = \sum_i C_{pi}\,n_i\,, \qquad H = \sum_i H_i\,n_i\,, \qquad S = \sum_i S_i\,n_i\,, \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} H_i &= \int_{T_0}^{T} C_{pi}\,dT + k_i\,, \\ S_i &= \int_{T_0}^{T} \frac{C_{pi}\,dT}{T} - R\ln p_i + l_i \equiv \int_{T_0}^{T} \frac{C_{pi}\,dT}{T} - R\ln p - R\ln n_i + l_i\,. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Für die spätere Rechnung werden wir noch die partiellen Ableitungen der Funktionen H und S nach T und p brauchen. Sie lauten in dimensionsloser Schreibweise

$$\left.\begin{aligned} \frac{H_T}{R} &= \frac{C}{R} + \sum_i \frac{H_i}{R\,T}\frac{T\,\partial n_i}{\partial T}\,, & \frac{T S_T}{R} &= \frac{C}{R} + \sum_i \frac{S_i}{R}\frac{T\,\partial n_i}{\partial T}\,, \\ \frac{p\,H_p}{R\,T} &= \sum_i \frac{H_i}{R\,T}\frac{p\,\partial n_i}{\partial p}\,, & \frac{p\,S_p}{R} &= -1 + \sum_i \frac{S_i}{R}\frac{p\,\partial n_i}{\partial p}\,. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Die Konstanten k_i in (21) mögen irgendwie so normiert sein, daß die Funktion h die Bedeutung der Gesamtenthalpie im Sinne des Abschnitts 2 annimmt. Entsprechendes soll für die Konstanten l_i in der Definition der Entropie gelten.

6. Zahlenbeispiel: Kritische Geschwindigkeit von dissoziierendem CO_2. Zur Erläuterung der Rechnung betrachten wir die Verhältnisse, die bei der Strömung von dissoziierendem Kohlendioxyd beim Druck von einer physikalischen Atmosphäre und einer Temperatur von 2000° Kauftreten. Als Reaktionsgleichung nehmen wir an:

$$2\,CO_2 \rightleftharpoons 2\,CO + O_2\,. \tag{23}$$

Bezeichnet α den Dissoziationsgrad des Kohlendioxyds im Gleichgewicht, so sind die Molenbrüche

$$n_{CO_2} = \frac{1-\alpha}{1+\frac{\alpha}{2}}\,, \qquad n_{CO} = \frac{\alpha}{1+\frac{\alpha}{2}}\,, \qquad n_{O_2} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{1+\frac{\alpha}{2}}\,. \tag{24}$$

Nach *Ulich*[2] besteht zwischen diesen die aus dem Massenwirkungsgesetz folgende Beziehung:

$$K_p = \frac{p_{CO}^2\,p_{O_2}}{p_{CO_2}^2} = p\,\frac{n_{CO}^2\,n_{O_2}}{n_{CO_2}^2} = p\,\frac{\frac{\alpha^3}{2}}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)(1-\alpha)^2}\,. \tag{25}$$

Dabei ist die Funktion K_p als reine Temperaturfunktion mit den Werten von Tabelle 1 gegeben, zu denen wir gleich die Differenzen bis zur dritten Ordnung berechnen

---

[1] *I. Sänger-Bredt*, Z. angew. Math. Phys. 6 (1955) S. 35.
[2] *H. Ulich*, Kurzes Lehrbuch der physikalischen Chemie 4. Aufl. S. 111/2, Dresden und Leipzig 1942.

Tabelle 1. *Daten zur Berechnung von* α *und* $\frac{\partial}{\partial T}\left(\log \frac{K_p}{\text{Atm}}\right)$ *für* $p = 1$ Atm., $T = 2000$ °K

T [°K]	$\log \frac{K_p}{\text{Atm.}}$	Δ	Δ^2	Δ^3
1000	— 20,36			
		9,74		
1500	— 10,62		— 4,87	
		4,87		2,95
2000	— 5,75		— 1,92	
		2,95		0,83
2500	— 2,80		— 1,09	
		1,86		
3000	— 0,94			

Gleichung (25) stellt implizit α und damit die Konzentrationen n_i als Funktionen von p und T dar. Durch partielle Differentiation von (25) erhält man die Relationen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial p} &= \frac{-1}{p}\,\frac{\alpha\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)(1-\alpha)}{3}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial T} &= \frac{\alpha\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)(1-\alpha)}{3}\,\frac{\partial}{\partial T}\left(\log \frac{K_p}{\text{Atm.}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{25'}$$

Durch entsprechende Differentiation der Gleichungen (24) folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial n_{CO_2}}{\partial T} &= -\frac{\partial \alpha}{\partial T}\,\frac{\frac{3}{2}}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2}, & \frac{\partial n_{CO_2}}{\partial p} &= -\frac{\partial \alpha}{\partial p}\,\frac{\frac{3}{2}}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2}, \\ \frac{\partial n_{CO}}{\partial T} &= \frac{\partial \alpha}{\partial T}\,\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2}, & \frac{\partial n_{CO}}{\partial p} &= \frac{\partial \alpha}{\partial p}\,\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2}, \\ \frac{\partial n_{O_2}}{\partial T} &= \frac{\partial \alpha}{\partial T}\,\frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2}, & \frac{\partial n_{O_2}}{\partial p} &= \frac{\partial \alpha}{\partial p}\,\frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{24'}$$

Zusammenfassung der Gleichungen (24)′ und (25)′ gibt

$$\left.\begin{aligned} \frac{T\,\partial n_{CO_2}}{\partial T} &= \frac{-\alpha(1-\alpha)}{2\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\,\frac{T\partial}{\partial T}\left(\log \frac{K_p}{\text{Atm.}}\right), & \frac{p\,\partial n_{CO_2}}{\partial p} &= \frac{\alpha(1-\alpha)}{2\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}, \\ \frac{T\,\partial n_{CO}}{\partial T} &= \frac{\alpha(1-\alpha)}{3\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\,\frac{T\partial}{\partial T}\left(\log \frac{K_p}{\text{Atm.}}\right), & \frac{p\,\partial n_{CO}}{\partial p} &= \frac{-\alpha(1-\alpha)}{3\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}, \\ \frac{T\,\partial n_{O_2}}{\partial T} &= \frac{\alpha(1-\alpha)}{6\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\,\frac{T\partial}{\partial T}\left(\log \frac{K_p}{\text{Atm.}}\right), & \frac{p\,\partial n_{O_2}}{\partial p} &= \frac{-\alpha(1-\alpha)}{6\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Für $p = 1$ Atm., $T = 2000$ °K ist nach Tabelle 1 $\log \frac{K_p}{\text{Atm.}} = -5{,}75$. Durch Iteration errechnet sich daraus mittels (25)

$$\alpha = 0{,}015\,147\,8\,. \tag{27a}$$

Ferner ergibt sich aus dem Differenzenschema der Tabelle 1 unter Benutzung der *Stirling*schen Formel für numerische Differentiation:

$$\frac{dF(0)}{du} = \frac{\delta F\left(-\frac{1}{2}\right) + \delta F\left(\frac{1}{2}\right)}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{\delta^3 F\left(-\frac{1}{2}\right) + \delta^3 F\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \cdots$$

Tabelle 2. *Berechnung der Gemisch-Funktionen für $p = 1$ Atm., $T = 2000\,°K$*

	Mischgas		Einzelgase			
	Größe	Zahlenwert bzw. Summe	CO_2	CO	O_2	Größe
1			44,010	28,010	32,000	M_i [g/mol]
2			7,2580	4,3590	4,5436	$\frac{C_{pi}}{R}$
3			6,0620	20,7161	4,0820	$\frac{H_i}{R\,T}$
4			37,1860	31,1030	32,3161	$\frac{S_i^*}{R}$
5	$\sum_i n_i$	1	0,9774490	0,0150340	0,0075170	n_i
6			0,0228	4,1974	4,8906	$-\ln n_i$
7			37,2088	35,3004	37,2067	$\frac{S_i}{R}$
8	M [g/mol]	43,6791	43,0175	0,4211	0,2405	$M_i\,n_i$ [g/mol]
9	$\frac{C}{R}$	7,19400	7,09432	0,06553	0,03415	$\frac{C_{pi}}{R}\,n$
10	$\frac{H}{R\,T}$	6,26742	5,92530	0,31144	0,03068	$\frac{H_i}{R\,T}\,n_i$
11	$\frac{S^*}{R}$	37,0579	36,3474	0,4676	0,2429	$\frac{S_i^*}{R}\,n_i$
12	$\sum_i -n_i \ln n_i$	0,1222	0,0223	0,0631	0,0368	$-n_i \ln n_i$
13	$\frac{S}{R}$	37,1801	36,3697	0,5307	0,2797	$\frac{S_i}{R}\,n_i$
14	$\sum_i \frac{T\,\partial n_i}{\partial T}$	0	—0,10645661	0,07097107	0,03548554	$\frac{T\,\partial n_i}{\partial T}$
15	$T\,M_T$ [g/mol]	—1,56172	—4,68516	1,98790	1,13554	$M_i \frac{T\,\partial n_i}{\partial T}$ [g/mol]
16	$\sum_i \frac{H_i}{R\,T} \frac{T\partial n_i}{\partial T}$	0,969755	—0,645340	1,470243	0,144852	$\frac{H_i}{R\,T} \frac{T\,\partial n_i}{\partial T}$
17	$\sum_i \frac{S_i^*}{R} \frac{T\,\partial n_i}{\partial T}$	—0,60454	—3,95870	2,20741	1,14675	$\frac{S_i^*}{R} \frac{T\,\partial n_i}{\partial T}$
18	$\sum_i -\ln n_i \frac{T\,\partial n_i}{\partial T}$	0,46902	—0,00242	0,29789	0,17355	$-\ln n_i \frac{T\,\partial n_i}{\partial T}$
19	$\sum_i \frac{S_i}{R} \frac{T\,\partial n_i}{\partial T}$	—0,13551	—3,96112	2,50531	1,32030	$\frac{S_i}{R} \frac{T\,\partial n_i}{\partial T}$
20	$\sum_i \frac{p\,\partial n_i}{\partial p}$	0	0,007403102	—0,004935401	—0,002467701	$\frac{p\,\partial n_i}{\partial p}$
21	$p\,M_p$ [g/mol]	0,1086035	0,3258105	—0,1382406	—0,0789664	$M_i \frac{p\,\partial n_i}{\partial p}$ [g/mol]
22	$\frac{p\,H_p}{R\,T}$	—0,0674381	0,0448776	—0,1022425	—0,0100732	$\frac{H_i}{R\,T} \frac{p\,\partial n_i}{\partial p}$
23	$\sum_i \frac{S_i^*}{R} \frac{p\,\partial n_i}{\partial p}$	0,0420395	0,2752918	—0,1535058	—0,0797465	$\frac{S_i^*}{R} \frac{p\,\partial n_i}{\partial p}$
24	$\sum_i -\ln n_i \frac{p\,\partial n_i}{\partial p}$	—0,0326156	0,0001688	—0,0207159	—0,0120685	$-\ln n_i \frac{p\,\partial n_i}{\partial p}$
25	$\sum_i \frac{S_i}{R} \frac{p\,\partial n_i}{\partial p}$	0,0094239	0,2754605	—0,1742216	—0,0918150	$\frac{S_i}{R} \frac{p\,\partial n_i}{\partial p}$

Tabelle 3. *Berechnung einiger Kontrollgrößen für $p = 1$ Atm., $T = 2000$ °K*

	Größe	Zahlenwert
26	$\frac{H_T}{R} = \frac{C}{R} + \sum_i \frac{H_i}{RT} \frac{T\,\partial n_i}{\partial T}$	8,16376
27	$\frac{T\,S_T}{R} = \frac{C}{R} + \sum_i \frac{S_i}{R} \frac{T\,\partial n_i}{\partial T}$	7,05849
28	$\frac{p\,S_p}{R} = -1 + \sum_i \frac{S_i}{R} \frac{p\,\partial n_i}{\partial p}$	− 0,9905761
29	$\frac{T\,M_T}{M}$	− 0,0357544
30	$\frac{p\,M_p}{M}$	0,002486395
31	$\frac{H}{RT} \frac{p\,M_p}{M}$	0,01558328
32	$\frac{S}{R} \frac{p\,M_p}{M}$	0,092 44442
33	$\frac{H}{RT} \frac{TM_T}{M}$	− 0,2240878
34	$\frac{S}{R} \frac{TM_T}{M}$	− 1,3293522
35	$\frac{MT}{R} s_T = \frac{TS_T}{R} - \frac{S}{R} \frac{TM_T}{M}$	8,38784
36	$\frac{M}{R} h_T = \frac{H_T}{R} - \frac{H}{RT} \frac{TM_T}{M}$	8,38785
37	$\frac{M\,p}{R} s_p = \frac{p\,S_p}{R} - \frac{S}{R} \frac{p\,M_p}{M}$	− 1,0830205
38	$\frac{M\,p}{RT}\left(h_p - \frac{1}{\varrho}\right) = \frac{p\,H_p}{RT} - \frac{H}{RT} \frac{p\,M_p}{M} - 1$	− 1,0830214

Tabelle 4. *Berechnung der Schallgeschwindigkeit für $p = 1$ Atm., $T = 2000$ °K*

	Größe		Zahlenwert
39	$\frac{MT}{R} N_a = \left(\frac{T\,S_T}{R} - \frac{S}{R} \frac{TM_T}{M}\right)\left(1 + \frac{p\,M_p}{M}\right) + \left(\frac{p\,S_p}{R} - \frac{S}{R} \frac{p\,M_p}{M}\right)\left(1 - \frac{TM_T}{M}\right)$		7,28695
40	$\frac{\varrho}{p} a^2 = \left(\frac{MT}{R} s_T\right) : \left(\frac{MT}{R} N_a\right)$		1,151077
41	$\frac{C}{R} : \left(\frac{C}{R} - 1\right)$		1,161446
42	$\frac{p}{\varrho} = \frac{RT}{M}$	$[m^2\,s^{-2}]$	380703,8
43	a^2	$[m^2\,s^{-2}]$	438219,4
44	a	$[m\,s^{-1}]$	661,981

die Ableitung von $\log \frac{K_p}{\text{Atm.}}$ an der Stelle $p = 1$ Atm., $T = 2000\,^\circ K$ zu

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\log \frac{K_p}{\text{Atm.}}\right) = 0{,}007\,190\,00\,^\circ\text{K}^{-1}, \qquad \frac{T\,\partial}{\partial T}\left(\log \frac{K_p}{\text{Atm.}}\right) = 14{,}380\,00\,. \tag{27b}$$

Wir haben die Größen α und $\frac{\partial}{\partial T}\left(\log \frac{K_p}{\text{Atm.}}\right)$ mit 6 Ziffern angegeben, um den voraussichtlich schwachen Einfluß der Dissoziation auf die kritische Geschwindigkeit mit Sicherheit herauszuholen, obwohl natürlich aufgrund der Zahlenangaben in Tabelle 1 nur drei Ziffern gerechtfertigt wären. Die einzelnen Schritte bei der Berechnung der Geschwindigkeit sind in den Tabellen 2 bis 4 festgehalten. Die thermodynamischen Funktionen der Einzelgase in Tabelle 2 wurden den Tabellen von *Wooley*[1] entnommen. Dabei konnten alle Entropiewerte ohne Umrechnung verwendet werden, da sie bereits so normiert sind, daß sie am Nullpunkt der absoluten Temperatur verschwinden. Die Nullpunktsenthalpie von CO_2 und O_2 wurde gleich Null gesetzt, diejenige von CO mit 66677 $\text{cal}_{15}/\text{mol}_{\text{Ch. Sk.}}$ angenommen, um innerhalb der Rechengenauigkeit die Gleichungen (6) und (7) exakt zu befriedigen. Dieser Zahlenwert stimmt bis auf etwa $1\,^0/_{00}$ mit Angaben der neueren Literatur für die Nullpunktsenergien der Reaktionspartner von Gleichung (23) überein[2]. In Tabelle 3 wird eine Kontrollrechnung für die Erfüllung der Gleichungen (6) und (7) gegeben, siehe Zeile 35 bis 38.

Nach Zeile 40 bzw. 41 der Tabelle 4 liegt das Quadrat der Schallgeschwindigkeit im Falle konstanter Konzentrationen um etwa 1% höher als im Falle veränderlicher Konzentrationen. Man kann sich dies dadurch plausibel machen, daß die spezifischen Wärmen im ersten Falle niedriger sind und daher ihr Verhältnis $c_p : c_v$, welches die Schallgeschwindigkeit maßgeblich bestimmt, größer als im Falle veränderlicher Konzentrationen ist. Schallwellen, bei denen die chemischen Konzentrationen dauernd konstant bleiben, können sich demnach in einer Düse entgegen der Strömungsrichtung durch die Zone der kritischen Geschwindigkeit hindurch fortpflanzen.

Für das betrachtete Zahlenbeispiel ist ein geringer Dissoziationsgrad mit schwacher Temperatur- und Druckabhängigkeit der Konzentrationen charakteristisch. Um Gegenbeispiele zu bilden, wurde der Rechnung das Dissoziationsgleichgewicht von molekularem und atomarem Wasserstoff bei 1 Atm. und $3500\,^\circ K$ bzw. $5000\,^\circ K$ zugrundegelegt. Im ersten Falle ist ein mittlerer Dissoziationsgrad mit einer sehr starken Temperatur- und Druckabhängigkeit der Konzentrationen verbunden, im zweiten Fall ist ein sehr hoher Dissoziationsgrad wieder mit einer geringen Temperatur- und Druckabhängigkeit der Konzentrationen gekoppelt. Auch in diesen beiden Fällen errechnet sich für die Schallgeschwindigkeit bei konstanten Konzentrationen ein größerer Wert als im Falle des Dissoziationsgleichgewichts. Die Abweichung beträgt in diesen Fällen größenordnungsmäßig 5%, also rund zehnmal so viel wie im obigen Beispiel.

7. Zusammenfassung. Die kritische Geschwindigkeit der Rohr- bzw. Düsenströmung eines chemisch veränderlichen Gasgemisches wird unter den Annahmen des permanenten chemischen Gleichgewichts, der Reibungslosigkeit und stationärer Verhältnisse nach der Stromfadentheorie berechnet und mit der Schallgeschwindigkeit verglichen. Es zeigt sich, daß die kritischen Geschwindigkeiten mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit niederfrequenter Schallwellen übereinstimmen, in denen das chemische Gleichgewicht der Zustandsänderung ohne Verzögerung folgt.

Die Rechnung wird am Beispiel der Strömung von CO_2 bei 2000° K und 1 Atm. unter Dissoziation in CO und O_2 erläutert. Hierbei ist die Schallgeschwindigkeit bei konstanter chemischer Zusammensetzung um etwa 0,5% höher als die kritische Strömungsgeschwindigkeit, was man mit dem höheren Wert der spezifischen Wärmen im Falle des Dissoziationsgleichgewichts erklären kann.

(Eingegangen am 26. Januar 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *H. Stümke*, Stuttgart-Degerloch, Meistersingerstraße 27

---

[1] *H. W. Wooley*, The NBS-NACA tables of thermal properties of gases. Table 9.10. Molecular oxygen (ideal gas state), Juli 1949; Table 14.10. Carbon monoxide (ideal gas state), Sept. 1951; J. Research NBS 52 (1954). S. 289

[2] *H. Zeise*, Thermodynamik III, 1, Tabellen, Leipzig 1954.

Tragwerke aus Aluminium

Von Dr. sc. techn., LL. D. h. c., Dr.-Ing. h. c., Dr.-Ing. E. h. **F. Stüssi,** o. Professor an der Eidgen. Technischen Hochschule, Zürich. Mit 174 Abbildungen. VII, 198 Seiten Gr.-8°. 1955. Ganzleinen DM 22,50

Inhaltsübersicht: **I. Allgemeine Überlegungen.** — **II. Der Baustoff und seine Eigenschaften:** Die Herstellung von Aluminium. Die Aluminiumlegierungen. Lieferformen. Festigkeit, Verformung und zulässige Beanspruchung. — **III. Verbindungsmittel:** Allgemeines. Nieten. Schrauben. Schweißen. Kleben. — **IV. Besondere Festigkeitsprobleme und Stabilitätsprobleme:** Biegung und Verdrehung. Knicken. Torsionsknicken und Kippen. Ausbeulen. — **V. Ausbildung und Bemessung der Bauelemente:** Zusammengesetzte Vollwandträger. Fachwerkträger. Besondere Bauformen. — **VI. Die Herstellung von Aluminiumtragwerken:** Werkstattarbeiten. Montagearbeiten. Korrosionsschutz und Oberflächenbehandlung. — **VII. Ausführungsbeispiele:** Brückenbauten. Hochbauten. Verschiedene Anwendungsformen. — **VIII. Übersicht über die Normen und mechanischen Eigenschaften der Knetlegierungen.**

Schon heute sind eine Reihe von bemerkenswerten Bauwerken aus Aluminiumlegierungen ausgeführt worden; die Bedeutung dieser Bauweise wird mit dem Ausbau der Produktionsstätten von Aluminium weiter ansteigen. Es scheint deshalb der Versuch erwünscht, die wichtigsten Grundsätze für den Entwurf und die Ausbildung solcher Tragwerke aus den besonderen Baustoffeigenschaften abzuleiten. Wenn sich auch diese Grundsätze weitgehend an die des Stahlbaues anlehnen, so wäre es doch verfehlt, die Bauformen und Bemessungsregeln, die sich im Stahlbau bewährt haben, direkt auf den Leichtmetallbau zu übertragen; es muß vielmehr angestrebt werden, die Bauformen hier so zu entwickeln, daß sie den Besonderheiten des Baustoffes möglichst gut entsprechen. Dies bedingt vor allem eine genügende Kenntnis von Herstellung und Eigenschaften des Baustoffes, wobei insbesondere die Frage der Dauerfestigkeit eine eingehende Berücksichtigung erfordert. Der niedrige Wert des Elastizitätsmoduls läßt gegenüber Stahl die Bedeutung der Stabilitätsprobleme stark ansteigen, deren Darstellung deshalb ein verhältnismäßig breiter Raum gewidmet ist. Ein Überblick über die wichtigsten bisher ausgeführten Anwendungsbeispiele soll die heute schon bestehenden Möglichkeiten der Aluminiumlegierungen im Bauwesen veranschaulichen.

Statik der rahmenartigen Tragwerke

Von Prof. Dr.-Ing. **J. Pirlet,** Köln, ehem. Honorarprofessor der Technischen Hochschule Aachen. Mit 80 Abbildungen und fünf Tafeln in einer Tasche. VII, 168 Seiten Gr.-8°. 1951.

Ganzleinen DM 24,—

Inhaltsübersicht: Erster Teil: **Grundlagen der Berechnung rahmenartiger Tragwerke.** Der elastisch eingespannte Stab. Das Stabgefüge. Der Knoten. Der Knotenstabzug. Die Einspanngrade ε. Berechnung der Einspannmomente M_i und M_k d. h. der Unbekannten in einem Stabzugfelde l_i. Gleichungen für M_i und M_k bei einzelnen Belastungsarten. — Anhang: Zusammenstellungen der Ergebnisse. — Zweiter Teil: **Der elastisch eingespannte kontinuierliche Balken in rahmenartigen Tragwerken. — Das Berechnungsverfahren.** Einleitung. Die Einspanngrade ε. Die Einspannmomente M_i und M_k des beiderseits elastisch eingespannten Balkens. Die Einspannmomente M in kontinuierlichen Trägern. — Dritter Teil. **Zahlenbeispiel,** Von der Belastung unabhängige Werte. Von der Belastung abhängige Werte. Vereinfachtes Verfahren. — **Literaturverzeichnis. — Sachverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG . BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Einflußflächen für Kreuzwerke

Freiaufliegende und über mehrere Öffnungen durchlaufende Systeme. Von Dr.-Ing. **Hellmut Homberg,** Hagen/Westf., und Dr.-Ing. **Josef Weinmeister,** Linz a./D. Zweite verbesserte Auflage. Mit 40 Abbildungen. VII, 156 Seiten 4°. 1956. Ganzleinen DM 43,50

Inhaltsübersicht: **A. Erläuterungen zum Aufbau und Gebrauch der Lösungen.** — Grundsätzliches zur Ausbildung und Wirkungsweise von Kreuzwerken und verwandten Systemen. Begriffsbestimmung und Einführung. Bezeichnungen am Kreuzwerk. Beschreibung des Gleichungsaufbaus der Einflußflächen. Hilfssystem in der Querrichtung. Lösungen und Tafeln für die Größen B_{ik} bzw. $B_{ik(n)}$. Durchlaufende Kreuzwerke. Berechnung von Kreuzwaben (orthotropen Platten). Auswertung der Einflußflächen. Hüllinien der Biegemomente und Querkräfte. Durchführung der Berechnung. Näherungsweise Berechnung von Kreuzwerken. Die Wirkung und näherungsweise Berücksichtigung der Drehsteifigkeit. Die Wirkung der Schubsteifigkeit. Beispiele. — **B. Lösungen für die Einflußflächen von Kreuzwerken.** Beidseitig frei aufliegende Kreuzwerke über einer Öffnung. Kreuzwerke über einer Öffnung, links frei aufliegend, rechts fest eingespannt. Kreuzwerke mit unendlich vielen, unendlich schmalen Querträgern beiderseits starr eingespannt. Durchlaufende Kreuzwerke über zwei Öffnungen. Durchlaufende Kreuzwerke über drei Öffnungen. Ordinaten f_{kj} der Biegelinien des Balkens auf zwei Stützen. — **C. Tafeln der Einflußflächen usw. von Kreuzwaben (orthotropen Platten).** — **D. Allgemeine Lösungen für die Auflagerkräfte B_{ik} für Balken auf drei bis zehn elastischen Stützen.** — **E. Tafeln der Auflagerkräfte B_{ik} von Balken auf elastischen Stützen (Querverteilungszahlen).** Balken auf 3 bis 8 Stützen. Balken auf unendlich vielen Stützen.

Es werden gebrauchsfertige, im Sinne der Baustatik genaue Lösungen für die Einflußflächen der statischen Größen geboten, die dazu dienen, dem Statiker eine schnelle Berechnung der mehrfach oder hochgradig statisch unbestimmten Kreuzwerke zu ermöglichen. Die Neuauflage enthält Lösungen für freiaufliegende und über mehrere Felder durchlaufende Kreuzwerke und daher auch den im Vorwort zur ersten Auflage angekündigten zweiten Teil des Gesamtwerkes. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, für durchlaufende Kreuzwerke solche Lösungen anzugeben, die beliebigen Stützweitenverhältnissen entsprechen. Weiter wird ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von Kreuzwerken angegeben. Die für die praktische Durchführung von Kreuzwerkberechnungen so nützlichen Tafeln der Querverteilungszahlen wurden durch Aufnahme neuer Tafeln für die Randsteifigkeit $1 \leq r \leq 2$ und für den Balken auf ∞ vielen Stützen erheblich erweitert, sie können auch für das Näherungsverfahren verwendet werden. Die zugehörige Theorie ist innerhalb der Arbeiten „Kreuzwerke, Statik der Trägerroste und Platten", Berlin 1951, und „Beitrag zur Kreuzwerkberechnung", Stahlbau 1954, veröffentlicht worden.

SPRINGER · VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Mit 2 Beilagen des Springer-Verlages · Berlin / Göttingen / Heidelberg.
Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. IX/7/2 0,8 K. B./Z. 040.